A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2020. 12. 16.)

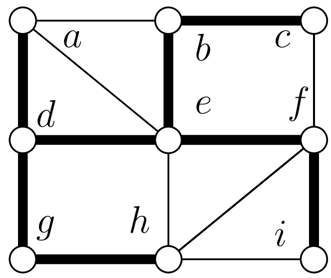
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp lehet kitölteni 90 ötöslottószelvényt (90 számból 5-re kell tippelni) úgy, hogy ne legyen két azonosan kitöltött szelvény és egyetlen szelvényen se legyen egyetlen találatunk se? (A szelvényeket elég a számhúzás után kitölteni.)

   Ha egy szelvényt úgy akarunk kitölteni, hogy egyetlen találatunk se legyen, akkor a 85 ki nem húzott számból kell 5-re tippelni, (2 pont)
   amit $\binom{85}{5}$-féleképp tehetünk meg. (3 pont)
   Ennyiféle lehetséges szelvényből kell nekünk 90 különbözőt kiválasztanunk, (2 pont)
   amit $\binom{\binom{85}{5}}{90}$-féleképp tehetünk meg. Ez tehát a feladat kérdésére a válasz. (3 pont)

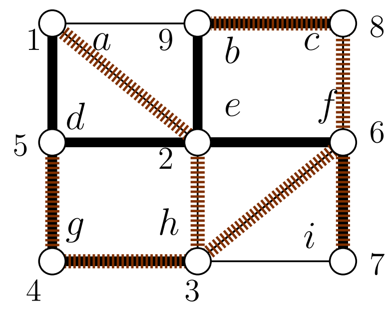
2. Hány levele van a 100-csúcsú F fának, ha F 40 db harmadfokú csúcsán kívül minden más csúcsának legfeljebb 2 a fokszáma?

   Jelölje ℓ az F levelei számát. Ekkor F másodfokú csúcsainak száma $100 - 40 - \ell = 60 - \ell$. (2 pont)
   A fákról tanultak szerint F-nek $|E(F)| = 100 - 1 = 99$ éle van, (3 pont)
   ezért a HSL alapján $3 \cdot 40 + 2 \cdot (60 - \ell) + 1 \cdot \ell = 2 \cdot 99$ adódik, (3 pont)
   ebből $\ell = 42$ pedig következik, ez tehát a válasz a feladat kérdésére. (2 pont)
   Egyébként könnyen látható, hogy van a feladatbeli tulajdonsággal rendelkező fa. (0 pont)



3. Indítsunk a felső ábrán látható G gráf a csúcsából mélységi bejárást és határozzuk meg a hozzá tartozó elérési sorrendet és mélységi fát. Legkevesebb hány élt kell törölni G-ből ahhoz, hogy a vastaggal jelölt élek a törlés után kapott gráf c gyökerű DFS fáját alkothassák?

   Az ábrán látható az órán tanult módon végrehajtott DFS után kapott feszítőfa ill. elérési sorrend. (4 pont)
   Az órán azt is tanították, hogy irányítatlan DFS után nincs keresztél. (2 pont)
   Ezért G-nek minden olyan élét törölni kell a masodik részhez, amelyik a vastaggal jelölt élek alkotta feszítőfa és c gyökér esetén keresztél lesz. (1 pont)



   Konkrétan a hf és hi élekről van szó. (1 pont)
   Könnyen ellenőrizhető, hogy a megvastagított élek a $G - hf - hi$ gráfnak egy c-gyökerű DFS-fáját alkotják. (1 pont)
   Ezért a második kérdésre 2 a válasz. (1 pont)

4. A mellékelt táblázat a Dijkstra algoritmus lefutását mutatja a G irányítatlan gráfon. Az egyes sorok az adott fázis utáni (r, ℓ) felső becsléseket adják meg. Határozzuk meg a ca él $\ell(ca)$ hosszát!

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	0	∞
42	24	7	0	∞
33	16	7	0	77
24	16	7	0	18
22	16	7	0	18

A Dijkstra algoritmus futásából adódóan a KÉSZ halmazba $r = d, c, b, e, a$ sorrendben kerülnek be a csúcsok, u.i. az egyes sorokban ezekhez a KÉSZ halmazon kívüli csúcsokhoz tartozik a legkisebb felső becslés. (4 pont)

A c csúcs tehát a második fázisban kerül a KÉSZ halmazba, ezért ekkor próbálunk javítani a ca él mentén. A táblázatból az derül ki, hogy ez sikerült: az a-ra vonatkozó felső becslés 42-ről 33-ra csökkent. (3 pont)

Ezek szerint $33 = D(c) + \ell(ca) = 7 + \ell(ca)$ (itt most kivételesn D jelöli az (r, ℓ)-felső becslést, a d ugyanis egy csúcs neve). (2 pont)

Innen pedig $\ell(ca) = 26$ adódik a keresett élhosszra. (1 pont)

5. Kritikus-e az e tevékenység az alsó ábrán látható PERT problémában?

Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $b, a, c, d, e, g, h, i, f$ sorrendet. (2 pont)

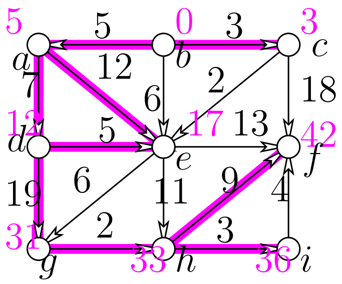
Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) (5 pont)

Ezutan meghatározzuk a kritikus tevékenységeket, azaz mindazon tevékenységeket, melyek kritkus úton vannak. (1 pont)

Kritikus út jelen esetben az olyan irányított bf-út, amely megjelölt élekből áll. (1 pont)

Egyetlen kritikus út van, mégpedig a $badghf$, ezért a kritikus tevékenységek kizárólag ezen út pontjai, azaz b, a, d, g, h, f, ezért az e tevékenység nem kritikus. (1 pont)

A PERT problémában a legrövidebb végrehajtási idő egyébként 42. (0 pont)



$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy ha az élsúlyokkal ellátott G gráfban az e él költségét 11-nek, ill. 77-nek választjuk, akkor a minimális költségű feszítőfa költsége 1956 ill. 1989 lesz. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége akkor, ha az e él költsége 42?

Két esetet vizsgálunk. Ha G-nek van olyan mkffája, ami nem tartalmazza az e élt, akkor az e él költségének növelése nincs hatással a mkffa költségére. Ha azonban e éle G minden mkffájának, akkor az e költségét ε-nal növelve a mkffa költsége is ε-nal növekszik, kivéve, ha az így megnövelt költség nagyobb, mint a $G - e$ mkffájának költsége. (5 pont)

A konkrét esetben, ha e költségét 11-ről 66-tal növeljük, akkor a mkffa költsége mindössze tud 43-mal növekedni. Ez azt jelenti, hogy ha a e költsége $x > 11 + 43 = 54$, akkor a mkffa költsége 1989, ha pedig $11 \leq x \leq 54$, akkor a mkffa költsége $1956 + (x - 11) = 1945 + x$. (4 pont)

Tehát a kérdezett $x = 42$ esetben a mkffa költsége $1945 + 42 = 1987$. (1 pont)