A számítástudomány alapjai 2020. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A H fa a G *feszítőfája*, ha H a G feszítő részgráfja (azaz $V(H) = V(G)$). A H feszítő részgráf akkor *feszítő erdő*, ha H erdő és G minden komponensének tartalmazza egy feszítőfáját.

Állítás: Tetsz. G gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Def: Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges E' élhalmazának $k(E')$ *költsége* a E'-beli élek összköltsége. Az $F \subseteq E$ élhalmaz *minimális költségű feszítőfa (mkff)*, ha (V, F) a G feszítőfája, és nem drágább a G egyetlen feszítőfájánál sem, azaz $k(F) \leq k(F')$ teljesül G minden (V, F') feszítőfájára.

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ egy tetsz. költségfüggvény, (V, F) pedig a G egy feszítőfája. F pontosan akkor mkff, ha minden c-re teljesül, hogy F tartalmazza a G legfeljebb c költségű élei alkotta gráf egy feszítő erdejét

Kruskal (mohó) algoritmus: Input: $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfüggvény. Output: a G egy minimális költségű feszítőfájának F élhalmaza. Működés: Legyen $F_0 = \emptyset$, és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, ahol $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$. Az output $F = F_m$, ahol $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

Tétel: A Kruskal-algoritmus által kiszámított F élhalmaz a G egy min költségű feszítőfája.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf egy *bejárásán* a V-beli csúcsok alábbiak szerinti végiglátogatását értjük. Minden v csúcs állapota kezdetben *eléretlen*, majd idővel v *elértté* válik, a bejárás végére pedig *befejezett* lesz. A bejárás egy általános lépése az alábbi.

1. Ha van *elért* csúcs, választunk egyet, mondjuk u-t. Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v *elértté* válik (mégpedig az uv él mentén). Ha nincs ilyen uv él, akkor u *befejezetté* válik.
2. Ha nincs *elért* csúcs, de van *eléretlen*, akkor egy *eléretlen* csúcsot *elértté* teszünk.
3. Ha nincs se *elért*, se *eléretlen* csúcs, azaz minden csúcs *befejezett*, akkor a bejárás véget ér.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy *elérési* ill. egy *befejezési sorrendje*, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek (az ún. *faélek*) alkotják a *bejárás fáját* (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő). A G gráf további uv éle *előreél*, ha u a bejárás fájában a v őse, *visszaél*, ha u a v leszármazottja, egyébként pedig *keresztél*.

Irányítatlan gráf bejárása úgy történik, hogy minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.

Köv.: Irányítatlan gráf bejárása után az előreélek megegyeznek a visszaélekkel.

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy r gyökércsúcs. A szélességi bejárás során az r csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, valamint azt a további szabályt követjük, hogy a lehető legkorábban elért csúcsból próbáljuk a soron következőnek elért csúcsot elérni. A bejáráshoz tartozó fa neve *szélességi fa*.

Megfigyelés: (1) Szélességi bejárás során az elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel. (2) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a BFS elérési sorrend és $i < j < k \leq \ell$, akkor $v_i v_\ell \in E(G)$ esetén $v_j v_k$ nem lehet faél, azaz gráfél nem ugorhat át faélt. **Köv.:** Szélességi bejárás után nincs előreél.

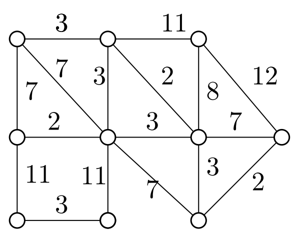
Def: Tetsz. G gráf az u és v csúcsainak $dist_G(u, v)$ *távolsága* a legrövidebb G-beli uv-út élszáma.

Megfigyelés: A BFS bejárás fája az r csúcsból minden más csúcsba a G gráf egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) legrövidebb útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G-beli távolsága r-től megegyezik az r gyökerű F szélességi fán mért távolsággal: $dist_G(r, v) = dist_F(r, v)$.

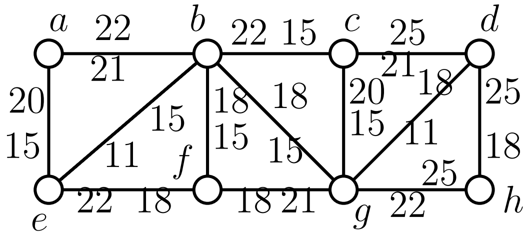
Tétel: A szélességi bejárás lépésszáma legfejlebb $konst \cdot (n+m)$, ahol $n = |V(G)|$ és $m = |E(G)|$.

Gyakorlatok

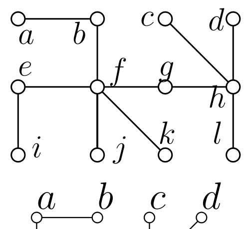
1. Hány feszítőfája van annak a gráfnak, amelynek csúcsai u_1, u_2 ill. $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és élei az összes lehetséges $u_i v_j$ párok, ahol $i = 1, 2$ ill. $j = 1, 2, \ldots, n$?
2. Keressünk a jobb oldali ábrán látható gráfban minimális költségű feszítőfát! (✓) Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak?



3. Adott egy négyzet négy csúcsa a síkon. Hogyan lehet a lehető legrövidebb összhosszúságú vonalak meghúzásával elérni, hogy a meghúzott vonalakat követve a négy csúcs bármelyikéből el lehessen jutni a másik három csúcsba? (!)
4. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.
5. A jobb oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15) (✓)



6. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két helyszín (két település vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével lényegében ingyen meg tudná építtetni a Rátót és Piripócs közti vezetéket. Ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
7. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal-algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
8. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
9. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)
10. Törpfalván kitört a járvány: csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
11. Rajzoljunk egy összefüggő G irányítatlan gráfot, válasszuk ki egy v csúcsát gyökérnek majd határozzuk meg, hogy legfeljebb hány keresztél keltkezhet a G gráf egy v gyökérből indított BFS bejárása után. (ZH '17 alapján) (✓)
12. Gyakoroljuk a BFS algoritmust irányított gráfon olyan r gyökércsúcsból indulva, ahonnan nem érhető el G minden csúcsa irányított úton. (✓)



13. A felső ábrán látható valamely G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G-ben? (pZH'14)
14. Az alsó ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit. (pZH'15)
15. Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
16. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?