A számítástudomány alapjai 2020. I. félév

13. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: Legyen $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf, *duálisa* az a $G^* = (V^*, E^*)$ gráf, amelyre V^* a G lapjainak halmaza ill. $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e-t határoló tartomány(ok)nak megfelelő duális csúcsokat összekötő él.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz *vágás*, ha Q egy olyan élhalmaz, hogy egyrészt Q elhagyásakor G szétesik (azaz komponenseinek száma megnő), másrészt Q egy legszűkebb élhalmaz ezzel a tulajdonsággal, azaz Q semelyik valódi részhalmazának elhagyásától sem esik G szét. Az e él *elvágó él*, ha $\{e\}$ vágás. A G gráf e és e' élei *soros élek*, ha $\{e, e'\}$ vágás.

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ sr, G^* pedig a G duálisa n^*, e^*, t^*, k^* paraméterekkel. Ekkor

(1) G^* sr, $n^* = t$, $k^* = 1$, azaz G^* öf.

(2) Ha $v \in V(G^*)$ a G i-dik lapjához tartozik, akkor $d^*(v) = \ell_i$.

(3) Ha G öf, akkor $(G^*)^* = G$.

(4) $C \subseteq E(G)$ kör G-ben $\iff$ C^* vágás G^*-ban.

(5) $Q \subseteq E(G)$ vágás G-ben $\iff$ Q^* kör G^*-ban.

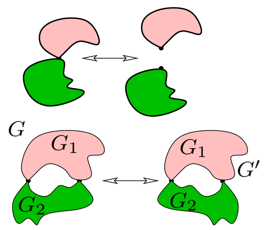
(6) $e \in E(G)$ a G hurokéle (elvágó éle) $\iff$ $f(e)$ a G^* elvágó éle (hurokéle).

(7) $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff$ $f(e), f(e')$ soros (párhuzamos) élek.

A (4,5) tulajdonságok neve *kör-vágás dualitás*.

Whitney egyik tétele: Legyen G^* a G SRt gráf duálisa. A H öf gráf pontosan akkor duálisa G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H megkapható G^*-ból az ábrán látható Whitney-operációk véges sokszori alkalmazásával.

Whitney másik tétele: Ha a G és H öf gráfok között létesíthető kör-vágás dualitás, akkor G és H SR gráfok és alkalmas síkbarajzolásaik egymás duálisai.



Gyakorlatok

1. Van-e olyan síkbarajzolt gráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?

2. Igaz-e, hogy ha G síkbarajzolt gráf és G^* a G duálisa, akkor G egyúttal a G^* duálisa?

3. Igazoljuk, hogy ha a G síkbarajzolható gráf G^* duálisa izomorf G-vel, akkor $e = 2n-2$ teljesül.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.

5. Adott $n > 2$ egész szám esetén van-e olyan síkbarajzolható G gráf, ami izomorf a duálisával és részgráfként tartalmaz egy C_n kört?

6. Legyen G tetszőleges síkbarajzolt gráf. Bizonyítsuk be, hogy van olyan H síkbarajzolt gráf, ami G-t részgráfként tartalmazza és emellett $H \cong H^*$.(*)

7. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem duálisa a duálisának.

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkbarajzolt, öf G gráf tartományai pontosan akkor színezhetők kis két színnel sakktáblaszerűen, ha G-nek létezik Euler körsétája.

9. A G sr gráfnak van Euler-körsétája. Igazoljuk, hogy G^* páros gráf!

10. Tfh G olyan legalább 4 csúcsú egyszerű sr gráf, amibe nem húzható újabb él az egyszerű sr tulajdonság megtartásával. Igazoljuk, hogy G^* 3-reguláris!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a G sr gráfnak van Hamilton-köre, akkor a tartományai 4 színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek!

12. Igazoljuk, hogy ha G n pontú sr gráf, és G izomorf G^*-gal, akkor G-nek $2n-2$ éle van! Tetszőleges $n > 3$-ra mutassunk példát ilyen G-re!

13. Tfh G öf, sr, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?