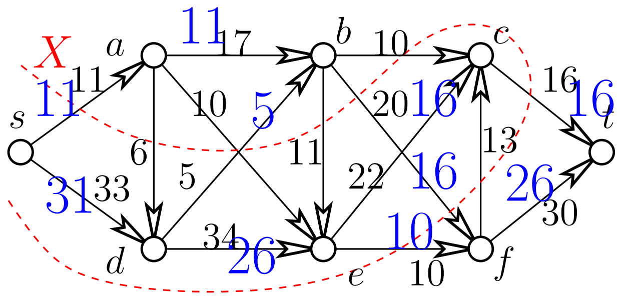
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2019. 12. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzunk meg a felső ábrán látható hálózatban egy maximális nagyságú st-folyamot és igazoljuk a talált folyam maximalitását!

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (5 pont)

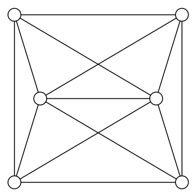
   

   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sdeft$ (10), $sabct$ (10), $sabft$ (1), $sdect$ (6), $sdbft$ (5), $sdecbft$ (10) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

   Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású. (4 pont)

   Találtunk egy 42 nagyságú folyamot és egy 42 kapacitású st-vágást Ezzel igazoltuk, hogy a megadott hálózatban a maximális folyamnagyság pontosan 42. (1 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 42 nagyságú st-folyamot ill. ugyanilyen kapacitású st-vágást. Ha azonban nincs indoklás, és a vágás vagy a folyam hibás, akkor az nem visz közelebb a megoldáshoz. Ilyenkor csak arra tudunk pontot adni, ha kiderül, hogy a hallgató érti, mi az st-folyam és st-vágás, ill. annak a nagysága ill. kapacitása. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont jár részpontszám. Az is teljes értékű megoldás, ha valaki megtalál egy 42 nagyságú folyamot, helyesen igazolja (de st-vágás nélkül) annak maximalitását; például megmutatja, hogy a segédgráfban nincs javító út és hivatkozik a Ford-Fulkerson-algoritmus azon tulajdonságára, hogy ilyenkor a megtalált folyam maximális nagyságú.)



2. Határozzuk meg az alsó ábrán látható G gráfra az $x = \nu(G)\cdot\alpha(G)\cdot(\tau(G)+\rho(G))$ kifejezés értékét. (ν: ftn élek, α: ftn pontok, τ: lef pontok, ρ: lef élek.)

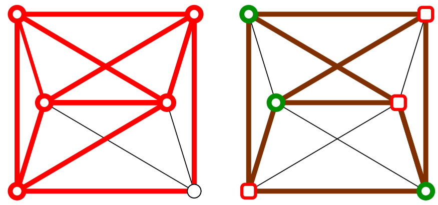
   A G gráfnak nincs hurokéle, így Gallai tétele miatt $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = 6$. (2 pont)
   A G gráfnak izolált pontja sincs, így Gallai tétele miatt $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| = 6$. (2 pont)
   A G gráfban van teljes párosítás (pl a három vízszintes él), ezért $\nu(G) = 3$ (1 pont)
   A fentiek miatt ekkor $\rho(G) = 3$. (1 pont)
   A G gráfban van kételemű független ponthalmaz, pl a bal felső és a jobb alsó csúcsok alkotnak ilyet. (1 pont)
   Ha lenne 3 független pont G-ben, akkor ezek bármelyikének a fokszáma legfeljebb 3 lehetne. Mivel G minden csúcsa legalább 4-fokú, ezért G-ben nincs három független csúcs, így $\alpha(G) = 2$. (1 pont)
   A Gallai tételből ekkor $\tau(G) = 4$. (1 pont)
   A formulába mindezt behelyettesítve $\nu(G)\cdot\alpha(G)\cdot(\tau(G)+\rho(G)) = 3\cdot 2\cdot(4+3) =$ (1 pont)
   $= 42$ a válasz. (0 pont)

Az $\alpha = 2$ megállapítás indokolható úgy is, hogy G lefedhető két klikkel, és egy független ponthalmaz minden klikkből legfeljebb egy csúcsot tartalmaz.

3. A G páros gráf színosztályai A és B. Tegyük fel, hogy G élei pirosra és zöldre vannak színezve, továbbá, hogy a piros élek gráfjában A-ra, a zöld élek gráfjában pedig B-re teljesül a Hall-feltétel. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan H feszítő részgráfja, aminek minden komponenese egy piros és zöld éleket felváltva tartalmazó kör.

   Hall tétele szerint ha egy páros gráf valamelyik színosztályára teljesül a Hall-feltétel, akkor e páros gráfnak van az adott színosztályt fedő párosítása. (2 pont)
   Ezek szerint G piros éleiből alkotható olyan M_p párosítás, ami fedi A-t, a zöld élekből pedig egy olyan M_z, ami fedi B-t. (3 pont)
   Mindebből az is következik, hogy a két színosztály mérete megegyezik, azaz M_p és M_z is a G teljes párosításai. (2 pont)
   Ha G-ből tehát töröljük az M_p és M_z egyikéhez sem tartozó éleket, akkor így a G olyan H feszítő részgráfját kapjuk, amiben minden csúcsból pontosan egy piros és pontosan egy zöld él indul. (2 pont)
   Az így kapott H részgráf tehát 2-reguláris, ezért H minden komponense olyan kör, amiben a piros és a zöld élek felváltva követik egymást. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e az alsó ábrán látható G gráf?
   Az ábra a G gráf egy K_5-tel (ill. egy $K_{3,3}$-mal) izomorf topologikus részgráfját mutatja. (7 pont)
   Se K_5, se $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, ezért G sem az. (3 pont)
   Ha valaki kimondja a Kuratowski-tételt, és látja, egy topologikus $K_{3,3}$-at vagy K_5-öt kellene keresni, az 3 pontot kap.



5. Hány olyan pozitív egész szám van, ami az $n = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ és $m = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ egész számok közül pontosan egynek osztója?

   A kérdezett számot úgy kapjuk, hogy az n és m pozitív osztói számából levonjuk az n és m közös osztói számát, majd az így kapott két számot összeadjuk. (2 pont)
   E közös osztók az órán tanultak szerint az (n, m) legnagyobb közös osztó pozitív osztói. (3 pont)
   Az lnko-ra tanultak szerint $(n, m) = 3^2 \cdot 7$. (1 pont)
   A pozitív osztók számát a kanonikus alakból meghatározó, tanult képlet szerint $d(n) = 3 \cdot 4 \cdot 3$, $d(m) = 3 \cdot 3 \cdot 2$ és $d((n, m)) = 3 \cdot 2$, (3 pont)
   ezért a fentiek szerint $3 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 =$ (1 pont)
   $= 42$ a válasz. (0 pont)

$\boxed{\star}$ A G gráf csúcsait a diszjunkt A és B halmazok alkotják. Tegyük fel, hogy minden A-beli csúcs pontosan 9 A-beli és 42 B-beli csúccsal, míg minden B-beli csúcs pontosan 20 A-beli és 10 B-beli csúccsal szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy G csúcsainak mohó színezéséhez a csúcsok bármely sorrendje esetén kevesebb, mint 42 szín kell.

Minden B-beli csúcs fokszáma $20 + 10 = 30$, így a mohó színezésben az B-beli csúcsok mindegyike az első 31 szín valamelyikét kapja. (4 pont)
Az A-beli csúcsok csupán 9 A-belivel szomszédosak, ezért a mohó színezés során minden A-beli csúcs kiszínezésekor a színezendő csúcsnak legfeljebb 9 olyan korábban kiszínezett szomszédja lehet, amelyik nem az első 31 szín valamelyikét kapta. (3 pont)
Ezért a mohó színezés során minden A-beli csúcshoz az első 41 szín közül tudunk alkalmas színt választani. (2 pont)
Ez pedig azt jelenti, hogy a mohó színezéshez sosem lesz szükség legalább 42 színre. (1 pont)