A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2019. 11. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots, 10$ számoknak, amiben az $1, 2$ és 3 ebben a sorrendben állnak, de nem feltétlenül közvetlenül egymás után?

   A leszámlálandó objektumokat generáljuk több lépésben úgy, hogy minden leszámlálandó sorrend pontosan egyféleképp legyen megkapható. (1 pont)
   Először az $1, 2, 3$ számok helyét határozzuk meg, (1 pont)
   amit $\binom{10}{3}$-féleképp tehetünk meg. (2 pont)
   Ezután a $4, 5, \ldots, 10$ számok sorrendjét határozzuk meg, (1 pont)
   amire $7!$ a lehetőségek száma. (2 pont)
   Ez a két döntéssel egyértelműen meghatározza a sorrendet, és minden leszámlálandó sorrend csakugyan egyféleképp áll így elő. (1 pont)
   A két döntésünk egymástól független, ezért a lehetőségek száma pontosan $\binom{10}{3} \cdot 7! = \frac{10!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 4$. (2 pont)

   Avagy:
   Az összes lehetséges sorrend száma $10!$, (2 pont)
   ám ezzel leszámláljuk azokat a sorrendeket is, ahol az $1, 2, 3$ számok nem ebben a sorrendben kovetik egymást. (1 pont)
   Világos egyrészt, hogy e 3 számnak összesen $3!$-féle sorrendje lehet, (1 pont)
   másrészt pedig, hogy e három szám bármely s sorrendjéhez ugyanannyi olyan sorrendje van a 10 számak, ami a három számot az adott s sorrendben tartalmazza. (3 pont)
   Ezért azoknak a sorrendeknek a száma, ahol a három szám a megadott módon követi egymást éppen $\frac{10!}{3!}$. (3 pont)

2. Az F fából töröltük a v csúcsot. Az így kapott gráf egyes csúcsainak fokszámai $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3$ lettek. Határozzuk meg a törölt v csúcs F-beli fokszámát.

   A törlés után 13 csúcs maradt, így az eredeti gráfnak 14 csúcsa (2 pont)
   és a fákról tanultak szerint 13 éle volt. (2 pont)
   A törlés utáni fokszámösszeg 20, ezért a HSL miatt a törlés utáni gráfnak 10 éle van. (3 pont)
   Mivel az F fának pontosan a v-ből induló élei tűntek el a v csúcs törle után, (1 pont)
   ezért v foka F-ben pontosan $13 - 10 = 3$. (2 pont)
   A teljes megoldáshoz az is hozzátartozik, hogy van olyan F fa, aminek alkalmas csúcsát törölve a feladatbeli fokszámsorozatot kapjuk. Ugyan könnyű ilyet konstruálni (két K_2 és a maradék csúcsokkal egy fa), de ezt nem vesszük szigorúan. (0 pont)
   Avagy:
   A törlés után kapott gráfnak 13 csúcsa és a HSL miatt 10 éle van, (5 pont)
   és mivel körmentes, ezért erdő. (1 pont)
   Az órán azt tanították, hogy egy n csúcsú k komponensű erdőnek $n-k$ éle van, ezért $F-v$ komponensei száma $13 - 10 = 3$. (2 pont)
   A v csúcs pontosan egy éllel kapcsolódik $F - v$ minden komponenséhez, (1 pont)
   ezért $d(v) = 3$. (1 pont)

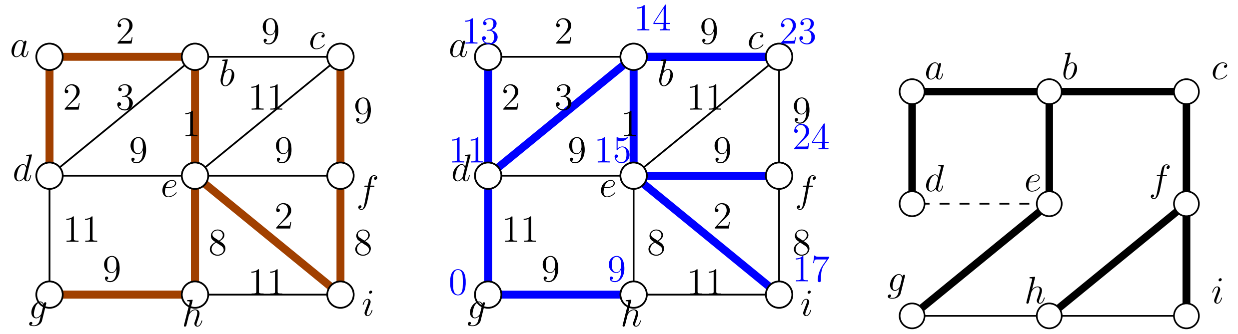
3. A bal oldali ábrán látható G gráf élei mellett az adott él hossza szerepel. Válasszuk ki G néhány élét úgy, hogy a kiválasztott éleken G bármely csúcsából G bármely másik csúcsába el lehessen jutni, és a kiválasztott élek összhossza a lehető legkevesebb legyen.

Mivel minden élhossz nemnegatív, ezért az optimális megoldás egy olyan feszítőfája lesz G-nek, amelynek az éleire írt számok összege a lehető legkisebb. (3 pont)
Ilyen feszítőfát az órán tanult Kruskal-algoritmussal tudunk találni, az élekről növekvő hossz szerint eldöntve, hogy bevegyük-e a fába. (2 pont)
Az ábrán megvastagítással jeleztük a Kruskal-algoritmus outputját: ezeket az éleket kell kiválasztanunk a helyes válaszhoz. (5 pont)

4. A bal oldali ábrán látható G gráf élei mellett az adott él hossza szerepel. Igaz-e, hogy az i csúcs legalább 7-tel távolabb van g-től, mint a d csúcs, azaz, hogy $dist(g,i) \geq dist(g,d) + 7$?

A G gráfban $dbei$ egy 6 hosszúságú di-út. (3 pont)
Ezért ha egy legrövidebb gd-útat ezzel a di-úttal kiegészítünk, akkor olyan gi utat kapunk, amelynek hossza $dist(g,d) + 6$. (3 pont)
A legrövidebb gi-út ennél nem lehet hosszabb, tehát $dist(g,i) \leq dist(g,d) + 6$. (3 pont)
A feladat kérdésére tehát nemleges a válasz. (1 pont)
Avagy.
Az órán tanultak szerint a Dijkstra-algoritmussal meghatározható a G csúcsainak a g csúcstól mért távolsága. (2 pont)
A Dijksra helyes futtatásával megállapítjuk ezeket a távolságokat. (Ld középső ábra) (7 pont)
Levonjuk a következtetést, miszerint nem igaz a kérdezett állítás. (1 pont)

5. A jobb oldali ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Tudjuk, hogy gh és hi a G élei. Lehetnek-e G-ben a d és e csúcsok szomszédosak?



Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráf DFS bejárása után nem keletkezik keresztél. (3 pont)
Azonban a bejárás bárhonnan is indul, ezen élek valamelyike keresztél lesz: a, b, c, f, h ill. i esetén de, d, e ill. g esetén pedig hi. (6 pont)
Ezért a kérdésre nem a válasz: d és e nem lehetnek G-ben szomszédosak. (1 pont)
Avagy:
Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráf DFS bejárása után nem keletkezik keresztél. (3 pont)
Mivel hi nem keresztél, ezért a DFS fa gyökere csak h vagy i lehet. Mivel gh nem keresztél, ezért a gyökér csak g vagy h lehet. (3 pont)
A mélységi bejárás tehát a h csúcsból indult. (1 pont)
Ekkor azonban de keresztél, (2 pont)
ezért a kérdésre nem a válasz: d és e nem lehetnek G-ben szomszédosak. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy F a G olyan feszítőfája, hogy G-nek Euler-sétája, az F éleinek törlésével keletkező $G - F$ gráfnak pedig Euler-körsétája van. Igazoljuk, hogy G-nek van Hamilton-útja.

A $G - F$ gráfnak van Euler-körsétája, ezért $G - F$-ben minden fokszám páros. (2 pont)
Mivel G-nek van Euler-sétája, ezért G-ben legfeljebb 2 páratlan fokú csúcs van. (1 pont)
Mivel az F fának legalább két levele van, (2 pont)
és az F fa minden v levelének a G-beli foka páratlan, (2 pont)
ezért F-nek pontosan két levelének kell lennie. (1 pont)
F tehát G-nek egy kétlevelű feszítőfája, így F-ben minden nem levél csúcs fokszáma 2, F tehát a G egy Hamilton-útja, és nekünk pontosan ennek a létezését kellett igazolnunk. (2 pont)

A levelekkel érvelés csak olyan fákra igaz, amelyeknek legalább két csúcsa van, ezért az állítást az 1 pontú G gráfokra (azaz K_1-re) is ellenőrizni kéne. Ez persze triviális, és nem is vacakolunk ezzel. Nem jár érte pont, de nem is vonunk le semmit, ha ez hianyzik.