A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2019. 12. 18.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

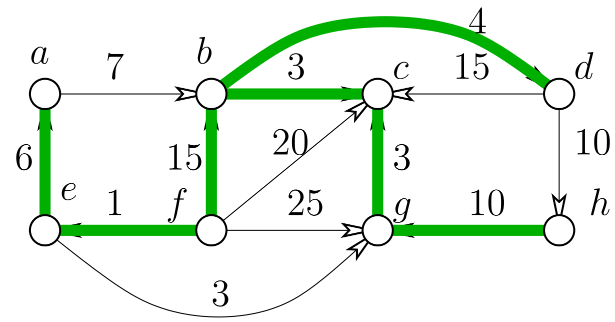
1. Hányféleképp lehet 10 óvodásnak kiosztani 3 piros, 3 fehér és 4 zöld építőkockát, néhány egyforma plüssrépát és plüssbrokkolit úgy, hogy mindenki egy kockát és egy plüsszöldséget kapjon? (Mindkét fajta plüssjószág korlátlan számban áll rendelkezésre.)

   Minden Óvodás a kétféle plüssjószág bármelyikét kaphatja, egymástól függetlenül, ezért a zöldségek kiosztása 2^{10}-féleképp tehető meg. (3 pont)
   A kockák kiosztása a 10 kocka egy ismétléses permutációja, erre a lehetőségek száma $\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}$. (4 pont)
   A zöldségek és a kockák bármely két kiosztása összepárosítható, (1 pont)
   ezért a lehetséges kiosztások száma a két fenti szám szorzata: $\frac{10!\cdot 2^{10}}{3!\cdot 3!\cdot 4!}$ (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy rendre $0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3$ a G egyszerű gráf csúcsainak fokszámai. Igaz-e, hogy bárhogyan is húzunk be G-be négy további élt, az így kapott gráfban bizonyosan lesz kör?

   A G gráf fokszámösszege 12, ezért a HSL miatt G-nek összesen 6 éle van. (2 pont)
   Ha még 4 élt behúzunk, akkor G-nek összesen 10 éle lesz. (2 pont)
   Ha mindezek után nem jön létre kör, akkor a kapott gráf erdő, (1 pont)
   aminek $n - k$ éle van, ahol n a csúcsok, k pedig a komponensek száma. (2 pont)
   Tekintettel arra, hogy G-nek 9 csúcsa van, és egy 9 csúcsú erdőnek legfeljebb 8 éle lehet, (2 pont)
   ezért a négy él behúzása után bizonyosan keletkezik kör. (1 pont)

3. Legyen G az ábrán látható gráf irányítatlan változata, és jelentsék az egyes éleire írt számok az adott él költségét. Határozzuk meg G egy olyan F feszítőfájának összköltségét, ami tartalmazza a bf élt, és az ilyen feszítőfák körében F éleinek összköltsége a lehető legkisebb.



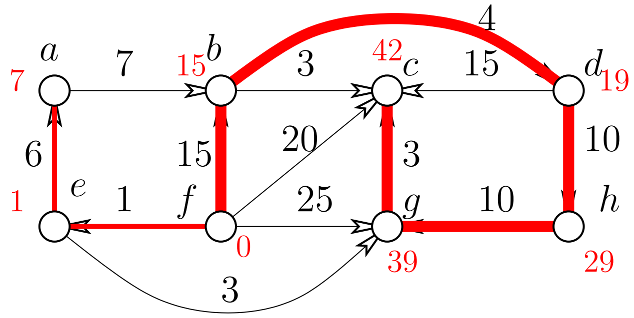
   A bf élt tartalmazó minimális költségű feszítőfák megegyeznek a G gráf minimális költségű feszítőfáival arra a módosított költségfüggvényre nézve, amit úgy kapunk, hogy a bf él költségét 0-ra változtatjuk, a többi él költségét pedig változatlanul hagyjuk. (4 pont)
   Az órán tanult Kruskal algoritmust lefuttatva, azaz e módosított költség szerint növekvő sorrendben döntve az egyes élek bevételéről, az ábrán látható feszítőfát (vagy egy ezzel azonos költségűt) kapunk. (5 pont)
   A kapott feszítőfa éleinek összköltsége 42, ez tehát a feladat kérdésére a válasz. (1 pont)

4. Tekintsük azt a G' irányított gráfot, ami az ábrán látható G gráfból úgy keletkezik, hogy a b csúcsra illeszkedő élek irányítását megfordítjuk. Lesz-e a G' gráfnak visszaéle minden d-ből indított mélységi bejárás után?

Ha a b-re illeszkedő élek irányítását megfordítjuk, akkor $bfgc$ irányított kör lesz. (3 pont)
Tanultuk, hogy egy irányított gráf pontosan akkor aciklikus, ha egyetlen mélységi bejárása után sem keletkezik visszaél. (3 pont)
Ezek szerint a kapott gráf bármely mélységi bejárása során lesz visszaél, így a d csúcsból indított mélységi bejárások mindegyikére is igaz ez. (4 pont)

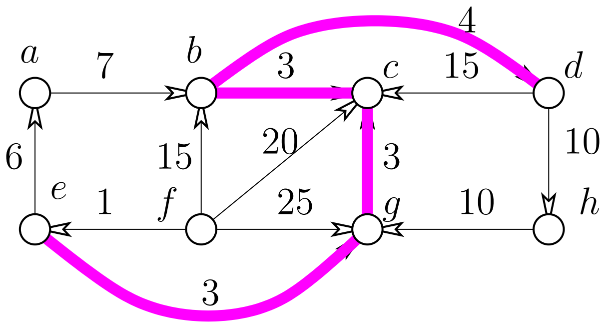
Ha valaki végrehajt a módosított gráfra egy d-ből indíott mélységi bejárást, és megállapítja, hogy van visszaél, az 5 pontot érdemel, hisz nem bizonyította be, hogy a mélységi bejárás még d-ből indítva is többféleképp futhat le, és csak egy ilyenről látta be, hogy visszaélt ad. Ha megpróbálja igazolni, hogy minden lehetséges lefutáskor is ugyanez történik akkor kaphat még egy pontot, és ha meggyőzően érvel, akkor persze a teljes pontszám jár.

5. Határozzuk meg az ábrán látható PERT feladathoz tartozó minimális végrehajtási időt. Kritikus-e az a csúcsnak megfelelő tevékenység?



Az órán tanultak szerint (pl. források egyenkénti törlésével meghatározzuk a megadott gráf csúcsainak egy topologikus sorrendjét. (1 pont)
Konkrétan, f, e, a, b, d, h, g, c egy ilyen sorrend. (2 pont)
Ebben a sorrendben dolgozzuk fel a csúcsokat, és határozzuk meg minegyikhez a legkorábbi kezdési időt. Ugyancsak megjelöljük azokat az éleket, amelyek az egyes csúcsok legkorábbi kezdési időpontjait meghatározzák. (1 pont)
Az ábrán látható értékeket és éleket kaptuk. (4 pont)
A megadott PERT feladthoz tartozo minimális végrehajtási idő tehát 42. (1 pont)
Az egyetlen kritikus út pedig az $fdbhgc$, ezért az a tevékenység nem kritikus, hisz nincs kritikus úton. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Legyen G az ábrán látható gráf irányítatlan változata, és jelentsék az egyes éleire írt számok az adott él költségét. Van-e G-nek Euler-sétája? Ha van, akkor határozzuk meg, mennyi a legkisebb összköltsége egy olyan útnak, ami G valamely Euler-sétájának végpontjait köti össze.

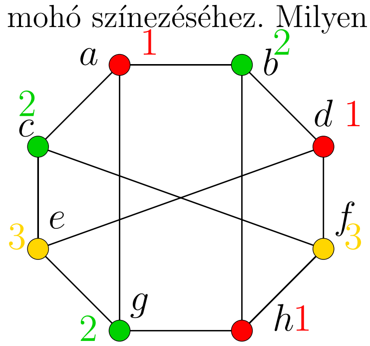


A G gráf (izolált pontotktól eltekintve is) összefüggő, (1 pont)
és az e és d csúcsok páratlan fokúak, míg a többi csúcs foka páros. (1 pont)
Ezért az órán tanult tétel szerint G-nek van Euler-sétája, (2 pont)
és minden ilyen sétának az e és a d csúcsok a végpontjai. (2 pont)
A feladatunk tehát egy e és d között vezető legrövidebb út meghatározása, azzal, hogy az élekre írt számokat élhosszoknak tekintjük. (1 pont)
Dijkstra algoritmusával vagy vmi adhoc érveléssel megmutatjuk, hogy $egbcd$ egy legrövidebb út a két vizsgált csúcs között, (2 pont)
és ennek hossza (azaz a feladatbeli megfogalmazás szerint összköltsége) kivételesen nem 42, hanem csak 13. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai
2. ZH javítókulcs (2019. 12. 18.)

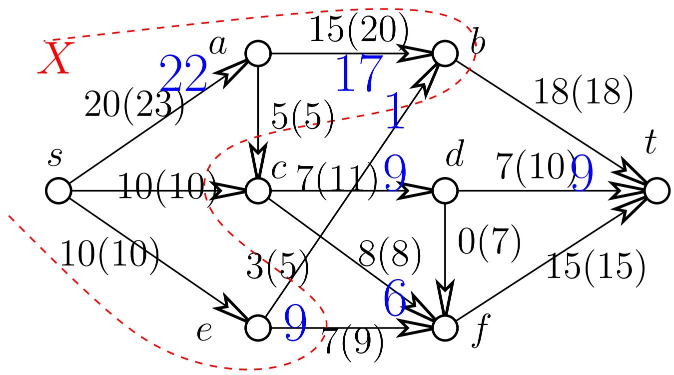
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?



Az órán tanult mohó színezés során a soron következő csúcs mindig az első olyan színt kapja, ami különbözik a már korábban kiszínezett szomszédai színétől. (4 pont)
A megadott sorrendben ilyen módon kiszínezve a csúcsokat az ábrán látható színezést kapjuk. (4 pont)
A színezéshez tehát három színre volt szükség, (1 pont)
és a h csúcs az 1-es színt kapja. (1 pont)

2. Maximális nagyságú-e a jobb oldali ábrán látható st-folyam? Ha nem, akkor határozzunk meg egy maximális nagyságú st-folyam nagyságát.



Az ábrán jelzett folyam nem maximális nagyságú, mert a $sabefcdt$ úton további folyam küldhető. (3 pont)
Az ábra az iménti javító úton történő javítás utáni állapotot mutatja: a kékkel írt számok a módosult folyamértékek az egyes éleken. Az így kapott folyam nagysága 42. (3 pont)
A kapott folyamnak megfelelő segédgráfban s-ből elérhető csúcsok halmaza az ábrán jelölt X ponthalmaz. Látnivalóan X egy 42 kapacitású st-vágást indukál. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a szóban forgó folyam egy maximális nagyságú st-folyam a vizsgált hálózatban, (1 pont)
így a feladat kérdésére 42 a válasz. (1 pont)

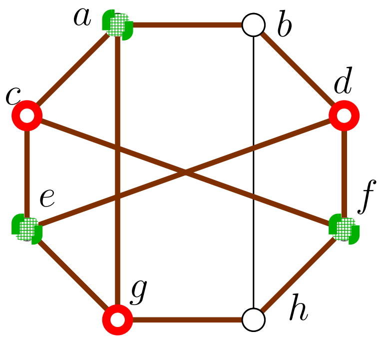
3. Állapítsuk meg a bal oldali ábrán látható G gráf $\nu(G), \rho(G), \alpha(G)$ ill. $\tau(G)$ paramétereit. (ν: ftn élek, α: ftn pontok, τ: lef pontok, ρ: lef élek.)

Mivel G nem tartalmaz hurokélt, (1 pont)
ezért Gallai első tétele miatt $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = 8$. (1 pont)

Mivel G nem tartalmaz izolált pontot, (1 pont)
ezért Gallai második tétele miatt $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)| = 8$. (1 pont)
Mivel G-nek van teljes párosítása (pl ab, ce, gh, df) ezért $\nu(G) = 4$, (1 pont)
így Gallai második tétele miatt $\rho(G) = 8 - 4 = 4$. (1 pont)
Mivel a, e, h a G független pontjai, ezért $\alpha(G) \geq 3$. (1 pont)
Azonban az $abdfhgec$ körben négy független csúcs csakis a, d, h, e ill. b, f, g, c lehetnek, márpedig a de ill. cf él miatt ezek G-ben nem függetlenek. Ezek szerint $\alpha(G) < 4$, (1 pont)
azaz az előző megfigyelés miatt $\alpha(G) = 3$. (1 pont)
Gallai első tételéből pedig $\tau(G) = 8 - 3 = 5$ adódik. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e a bal oldali ábrán látható G gráf?

   Az ábra a G gráf egy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfját mutatja. (7 pont)
   Mivel $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, ezért G sem az. (3 pont)
   Ha valaki kimondja a Kuratowski-tételt, és látja, egy topologikus $K_{3,3}$-at vagy K_5-öt kellene keresni, az 3 pontot kap.



5. Legalább hány pozitív osztója van az n pozitív egésznek, ha n^2-nek pontosan 143 pozitív osztója van?

   Legyen $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ az n kanonikus alakja. Ekkor n^2 kanonikus alakja $n = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$. (2 pont)
   Az órán tanultak miatt n^2 pozitív osztóinak száma $143 = d(n^2) = (2\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_k + 1)$. (3 pont)
   Mivel 143 kanonikus alakja $143 = 11 \cdot 13$, ezért n^2 kanonikus alakja vagy $n^2 = p^{142}$ vagy $n^2 = p^{10} \cdot q^{12}$. (2 pont)
   Innen vagy $n = p^{71}$ vagy $n = p^5 \cdot q^6$, (1 pont)
   vagyis vagy $d(n) = 71 + 1 = 72$ vagy $d(n) = (5 + 1) \cdot (6 + 1) = 42$. (1 pont)
   A kérdésre a válasz tehát 42 (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a G páros gráf minden A színosztálybeli csúcsának fokszáma 6, míg minden B színosztálybelié 4. Határozzuk meg a G-beli független élek maximális számát, $\nu(G)$-t, ha a B színosztály 63 csúcsból áll.

Mivel G minden élének pontosan egy A-beli és pontosan egy B-beli végpontja van, ezért G élei száma megegyezik az A-beli ill. a B-beli csúcsok fokszámösszegével: $6 \cdot |A| = |E(G)| = 4 \cdot |B| = 4 \cdot 63 = 252$, (2 pont)
ahonnan $|A| = \frac{4 \cdot |B|}{6} = \frac{2 \cdot 63}{3} = 42$. (2 pont)
A G páros gráf, így Kőnig tétele szerint $\nu(G) = \tau(G)$. (2 pont)
Az A színosztály lefogó ponthalmaz, ezért $\tau(G) \leq 42$. (1 pont)
Másrészt ha U egy lefogó ponthalmaz, akkor $252 = |E(G)| \leq \sum_{v \in U} d(v) \leq |U| \cdot \Delta(G) = 6 \cdot |U|$ adódik. (1 pont)
Ezek szerint $|U| \geq \frac{252}{6} = 42$, vagyis $\tau(G) \geq 42$. (1 pont)
Mindezt összevetve $\nu(G) = \tau(G) = 42$ a feladat kérdésére a válasz. (1 pont)

Az első 4 pont után így is folytatható a megoldás:

A maximális párosítás méretére $\nu(G) \leq |A| = 42$ triviálisan teljesül. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy van A-t fedő párosítás G-ben. A Hall tétel miatt ehhez csak a Hall-feltétel teljesülését kell A-ra ellenőrizni. (2 pont)
Legyen most $X \subseteq A$. Ekkor ha $E(X)$ jelöli az X-ből induló élek halmazát, akkor $E(X) \subseteq E(N(X))$ miatt $4 \cdot |N(X)| = |E(N(X))| \geq |E(X)| = 6 \cdot |X|$, vagyis $|X| \leq \frac{4}{6}|N(X)| \leq |N(X)|$. (2 pont)
Ezek szerint $\nu(G) \geq |A| = 42$, ahonnan a korábbi megfigyelés miatt $\nu(G) = 42$ adódik. (1 pont)