

# A számítástudomány alapjai 2019. I. félév

8. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

## Tudnivalók

**Egészértékűségi (EgÉr) lemma:** Ha a  $c$  kapacitásfüggvény minden élen egész értéket vesz fel, akkor a maximális nagyságú folyamok közt létezik olyan  $f$  folyam, ami minden élen egész értéket vesz fel (azaz ha a  $c$  kapacitás egész, akkor létezik *egészfolyam* a maximális folyamok között).

**Edmonds-Karp tétel:** Ha a javító utas algoritmusban mindig egy lehető legkevesebb élből álló javító út mentén javítunk, akkor legfeljebb  $nm$  javítás kell a maximális folyam megtalálásához, ahol  $n$  a hálózat csúcsainak,  $m$  pedig az éleinek száma.

**Def:** A  $G$  gráf *páros*, ha  $G$  2-színezhető, azaz ha  $\chi(G) \leq 2$ .

**Tétel:** Tetszőleges  $G$  irányítatlan gráf pontosan akkor páros, ha  $G$ -nek nincs páratlan köre.

**Def:** A  $G$  gráf csúcsainak  $U$  részhalma *független* ha  $U$  nem feszít élt, azaz  $U$ -nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét  $\alpha(G)$  jelöli, azaz  $\alpha(G) = k$ , ha van  $G$ -nek  $k$  páronként nem szomszédos pontja, de  $k + 1$  nincs.

Az  $U$  ponthalmaz *lefogó* tulajdonságú, ha  $U$  *lefogja*  $G$  minden élet, azaz  $G$  minden élének van  $U$ -beli végpontja, más szóval  $G - U$  üres gráf. A  $G$  minimális méretű lefogó ponthalmazának mérete  $\tau(G) = k$  ha van  $k$  méretű lefogó ponthalmaz  $G$ -ben, de  $k - 1$  méretű nincs.

**Def:** A  $G(V, E)$  gráfban éleinek  $M$  részhalma *független* (más szóval *párosítás*), ha  $F$  élei diszjunktak, azaz  $G$  bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És  $M$ -ben hurokélek sincsenek.) A  $G$ -beli független él maximális számát  $\nu(G) := \{|M| : M \text{ a } G \text{ párosítása}\}$  jelöli, tehát  $\nu(G) = k$ , ha  $G$ -nek van  $k$  páronként diszjunkt éle, de  $k + 1$  nincs. A  $G$  gráf egy *teljes párosítása* alatt a  $G$  olyan  $F$  párosítását értjük, amely  $G$  minden pontját *fedti*, azaz  $V$  minden pontjából indul  $F$ -nek éle.

A  $G$  éleinek  $F$  részhalma *lefogó élhalmaz* ha  $V(F) = V(G)$ , azaz  $G$  minden csúcsából indul legalább egy  $F$ -beli él. A lefogó élhalmazok közül a legkisebb mérete  $\rho(G)$ , vagyis  $\rho(G) = k$ , ha  $k$  él le tudja fogni  $G$  minden pontját, de  $k - 1$  nem.

**Megfigyelés:** Tetszőleges véges  $G = (V, E)$  gráfra (1)  $\nu(G) \leq \frac{1}{2}|V|$  és (2)  $\nu(G) \leq \tau(G)$ , (3)  $\alpha(G) \leq \rho(G)$  (ha  $G$ -nek nincs izolált pontja), (4)  $U \subseteq V$  pontosan akkor független, ha  $V \setminus U$  lefogó ponthalmaz. Végül (5)  $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ , ha  $G$  egyszerű.

**Gallai tételei:** Tetszőleges véges,  $n$  pontú  $G$  gráfra (1)  $\tau(G) + \alpha(G) = n$  ha  $G$  hurokélmentes, és (2)  $\nu(G) + \rho(G) = n$  ha  $G$ -ben nincs izolált pont.

**Def:** Ha  $G = (V, E)$  és  $X \subseteq V$  akkor  $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X, vx \in E\}$  az  $X$  ponthalmaz  $G$ -beli szomszédsága.

**Hall tétel:** Tetsz.  $G = (A, B; E)$  páros gráfnak pontosan akkor létezik  $A$ -t fedő párosítása, ha az bármely  $X \subseteq A$  csúcsalmazra  $|X| \leq |N(X)|$  teljesül.

**Frobenius tétele:** Tetsz.  $G = (A, B; E)$  páros gráfnak pontosan akkor létezik teljes párosítása, ha (1)  $|A| = |B|$  és (2)  $|X| \leq |N(X)|$  teljesül tetszőleges  $X \subseteq A$  részalmazra.

**Kőnig tétel:** Ha  $G$  véges, páros gráf, akkor  $\tau(G) = \nu(G)$ .

**Alternáló utas algoritmus:**

Input:  $G = (A, B; E)$  ps gráf.

Output:  $M$  maximális párosítás.

Kiindulunk az  $M = \emptyset$  párosításból, és javító utat keresünk. Ez olyan ú.n. alternáló út, aminek felváltva  $M$ -beliek és  $M$ -en kívüliek az élei és  $A$  egy fedetlen pontjából  $B$  fedetlen pontjába. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy  $M$  éleit  $B$ -ből  $A$ -ba,  $G$  többi élet pedig  $A$ -ból  $B$ -be irányítjuk, majd BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen út, akkor az egy javító út. Ha találtunk ilyet, akkor az út  $M$ -beli éleit kidobjuk  $M$ -ből, az  $M$ -en kívülieket pedig bevesszük  $M$ -be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz. Ezt követően újabb javító utat keresünk. Ha már nincs javító út, akkor az aktuális  $M$  párosítás maximális, azaz a mérete  $\nu(G)$ . Az  $A$ -beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető  $B$ -beli csúcsokkal és az  $M$  által fedett,  $A$ -beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető  $A$ -beli csúcsok egy  $\nu(G)$  méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

## Táblázatba sűrített tudomány

$\alpha \leq \rho$	max ftn	min lef	ps gráfra $\nu = \tau$ (Kőnig)
<b>pont</b>	$\alpha$	$\tau$	$\nexists$ hurokél: $\alpha + \tau = n$ (Gallai 1)
<b>él</b>	$\nu$	$\rho$	$\nexists$ iz. pont: $\nu + \rho = n$ (Gallai 2)
$\nu \leq \tau \leq 2\nu$			ps gráfra ( $\nexists$ iz. pont) $\alpha = \rho$ (Kőnig)

## Gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-reguláris páros gráfban (tehát amiben minden foksám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa. (✓)
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges  $G$  gráfra  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$  teljesül. (✓)
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $n$ -csúcsú, egyszerű  $G$  gráfra  $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$  teljesül.
4. Tfh  $G$  egyszerű,  $|V(G)| = 2000$  és  $\tau(G) = 678$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -ben nincs teljes párosítás!
5. Legyen  $G$  egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6.
6. Igazoljuk, hogy  $\nu(G) \geq 6$ .
6. Határozzuk meg a  $C_n$  kör, a  $K_n$  teljes gráf ill. a  $K_{n,n}$  teljes páros gráf  $\alpha, \tau, \nu$  ill.  $\rho$  paramétereit. (✓)
7. Az  $F$  élhalmaz a  $G$  gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk  $F$ -ről? Az  $U$  pontthalmaz a  $G$  gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk  $G$ -ről és  $U$ -ról? (✓)
8. Igazoljuk, hogy  $\omega(\overline{G}) \leq 75$ , ha  $G$  egyszerű, összefüggő, 100-csúcsú és van 25 élű párosítása.
9. Tfh a  $G$  110 pontú gráf és lefogható 73 éllel. Igazoljuk, hogy  $G$ -nek van 37 élű párosítása.
10. Legyen a  $G$  gráf csúcshalmaza  $\{1, 2, \dots, 2001\}$ , és az  $i, j$  csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha (a) az  $i + j$  szám 3-mal osztva 1 maradékot ad ill. (b) ha az  $i + j$  és 74 relatív prímek. Határozzuk meg mindkét esetben a  $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$  gráfparamétereket. (✓)
11. Legyen a  $H$  gráf csúcshalmaza  $\{1, 2, \dots, 74\}$ , és az  $i, j$  csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az  $0 < |i - j| \leq 2$ . Határozzuk meg a  $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$  gráfparamétereket.
12. Igazoljuk, hogy tetszőleges izolált pontot nem tartalmazó  $G$  páros gráfra  $\alpha(G) = \rho(G)$  teljesül. (✓)
13. Tegyük fel, hogy a 88 pontú  $G$  páros gráf egy lefogó élhalmaza független élekből áll. Határozzuk meg  $\tau(G)$  értékét, azaz a  $G$ -t lefogó pontok minimális számát. (ZH'14)
14. Gyakoroljuk az alternáló utas algoritmust kis gráfokon. (✓)
15. Tegyük fel, hogy a  $G$  páros gráf  $k$ -reguláris, azaz minden csúcsának a fokszáma  $k$  valamely  $k \geq 1$  egészre. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -nek van teljes párosítása. Igazoljuk azt is, hogy  $G$  élei úgy színezhetők ki  $k$  színnel, hogy minden csúcsból különböző színűek élek induljanak. (!)
16. Egy  $n \times n$  méretű táblázat néhány mezejét zöldre festették úgy, hogy bárhogy is választunk ki  $k$  sort, az azokban található zöld mezők legalább  $k$  oszlophoz tartoznak. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható  $n$  zöld mező úgy, hogy azokra bástyákat állítva a bástyák közül semelyik kettő sem üti egymást. (!)
17. A házassági tanácsadáson  $n$  pár ücsörög a váróban. Ebben a kiélezett helyzetben mindenki az asztalon heverő magazinok közül próbál egy számára érdekeset megkaparintani. Tudjuk, hogy minden várakozó legalább  $n$  magazint talál érdekesnek, ám valamiféle különös ok folytán nincs olyan magazin, amit ugyanannak a házaspárnak mindkét tagja szívesen forgatna. Bizonyítsuk be, hogy mindenki egyszerre találhat kedvére való olvasnivalót.
18. Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű, páros gráf  $A$  színosztálya 28, a  $B$  színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a  $B$  színosztálynak valamely  $Y$  részalmazára  $|Y| = 18$  és  $|N(Y)| = 12$ . Mutassuk meg, hogy az  $A$  színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan  $X \subseteq A$  halmaz, melyre  $|N(X)| < |X|$ . (ZH '14)
19. Tegyük fel, hogy a 88 pontú  $G$  páros gráfban  $\alpha(G) = 44$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -re teljesül a Hall feltétel, azaz  $|X| \leq |N(X)|$  az  $A$  színosztály minden  $X$  részalmazára esetén. (pZH '14)
20. Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az  $A$  színosztályban minden pont foka legalább 66,  $B$ -ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van teljes párosítása. (ZH '15)
21. Tegyük fel, hogy  $G = (A, B; E)$  egyszerű, páros gráf  $A$  színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de  $A$ -ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt,  $A$  tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása. (pZH '15)