A számítástudomány alapjai 2019. I. félév

7. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A G egyszerű gráf csúcsainak egy *színezésén* színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. ($f : V \to \mathbb{N}$, amire $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.) Egy színezésben azonos színt kapó csúcsok halmaza a *színosztály.* A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

Def: A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G-ben van k méretű klikk, de nincs $k+1$ méretű.)

Állítás: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ valamint $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$.

Def: A *hálózat* egy (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ egy irányított gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ a G különböző csúcsai, ún. *termináljai* (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f : E \to \mathbb{R}_+$ egy *folyam*, ha $0 \leq f(e) \leq c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-feltétel*). Az f folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az f folyam *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su \in E} f(su) - \sum_{us \in E} f(us)$.

Def: A fenti hálózatban ha $X \subset V$ olyan halmaz, hogy $s \in X \not\ni t$, akkor a hálózat X által indukált *(st-)vágása* az X és $V \setminus X$ között futó élek halmaza, melybe beletartoznak a $V \setminus X$-ből X-be futó élek is. Az X által indukált st-vágás kapacitása $c(X) := \sum_{u \in X, v \in V \setminus X} c(uv)$, azaz az X-ből $V \setminus X$-be futó élek összkapacitása .

Lemma: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f egy folyam és $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást indukál, akkor $m_f = \sum_{v \in X, u \in V \setminus X} f(vu) - f(uv)$, azaz a folyamnagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel. **Köv.:** Ha f megengedett folyam és X st-vágást indukál, akkor $m_f \leq c(X)$.

Állítás: Ha a (G, s, t, c) hálózatban egy f st-folyam és $s \in X \not\ni t$ esetén $m_f = c(X)$ teljesül, akkor f maximális nagyságú st-folyam és X minimális kapacitású st-vágást indukál.

Ford-Fulkerson tétel: Tetszőleges hálózatban $\max m_f = \min c(X)$.

Def: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f pedig egy folyam, akkor a $G_f = (V(G), E_f)$ az f-hez tartozó *segédgráf*, melyre $uv \in E_f$ ha $uv \in E(G)$ és $f(uv) < c(uv)$ (*előreél*) vagy ha $vu \in E(G)$ és $f(vu) > 0$ (*visszaél*). Az f folyamhoz egy *javító út* a G_f segédgráf egy s-ből t-be vezető irányított útja.

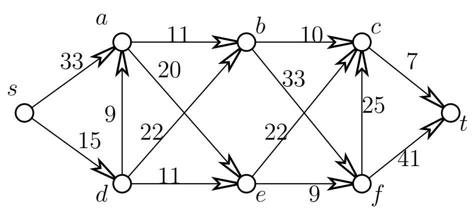
Állítás: Ha egy f folyamhoz tartozó G_f segédgráfban pontosan akkor létezik javító út, ha f nem maximális nagyságú. A javító út mentén az előreéleken ε-nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken ε-nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamot, a folyam nagysága ε-nal növelhető.

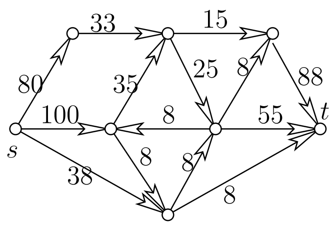
Javító utas algoritmus Kiindulunk a $f \equiv 0$ folyamból, és addig növelünk az aktuális f-hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs további javítás, akkor a folyam maximális. A segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza ekkor minimális st-vágást indukál.

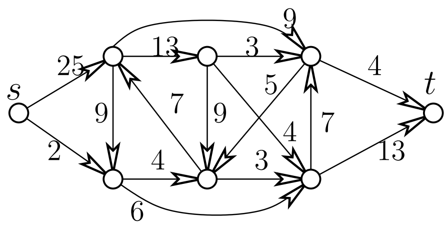
Gyakorlatok

1. Rajzolgassunk kis gráfokat, és színezzük ki a csúcsaikat a lehető legkevesebb színnel. (✓)
2. A G gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
3. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma? (✓)
4. Van-e olyan G gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de G mégsem színezhető ki 3 színnel? (✓)
5. Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol a független pontok maximális száma $\alpha(G) = k$, ha G-ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs. (!)
6. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$. (✓)
7. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És ha $\chi(G) \leq 3$?
8. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3$ $\forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3$ $\forall v \in V$?
9. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

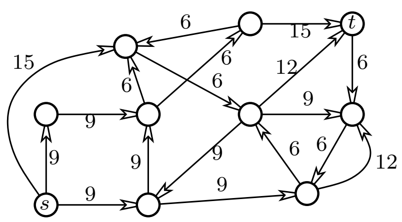
10. Mutassunk a bal oldali ábrán látható (G, s, t, c) hálózatban egy minimális kapacitású st-vágást. Találjunk a középső ábrán látható hálózatban minimális kapacitású st-vágást és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású st-vágás. (✓) (ZH '16, pZH '14)
11. A sithek Sötét Testvérisége a jobb oldalion látható gráf s csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács t támaszpontjára oly módon, hogy a sithek a gráf élei mentén szeretnének t-be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sitheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon s-ből t-be jutni. (ZH '15)

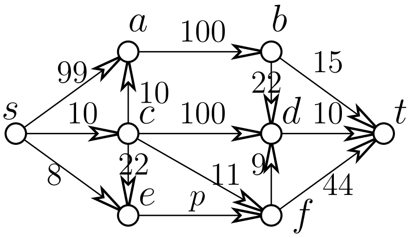


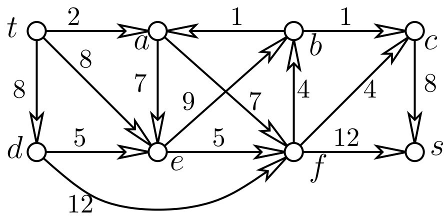




12. Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.) (✓)







13. Határozzuk meg a fenti középső hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyamnagyság pontosan 42. (pZH '15)
Határozzuk meg a maximális folyamnagyságot a p parméter függvényében.
14. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagytározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. A fenti jobb oldali ábrán t jelzi a tározót, s pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa itt a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy a kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Cél: a lehető leggyorsabban zárjunk le minden lehetséges s-be vezető utat az arra áramló melléktermék elől. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre. (!) (ZH '10)
15. Adott a D irányított gráf valamint élein egy c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw-folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw-folyam. (!)
16. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív ε-nal csökkentve a maximális folyamnagyság is pontosan ε-nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas ε-nal növelve, a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él? (✓)
17. Legyen s és t egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit s-től t felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen? (*)
18. Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor van olyan f' folyam is, amire $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre. (*)
19. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15. (!*)