A számítástudomány alapjai 2019. I. félév

6. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ gráf *Euler-(kör)sétája* a G olyan (kör)sétája, mely G minden élét tartalmazza.

Megfigyelés: Ha a véges G (irányított) gráfnak létezik Euler-körsétája, akkor (1) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő és (2) G minden csúcsának fokszáma páros (irányított esetben minden v csúcsra $\delta(v) = \rho(v)$). Ha G-ben létezik Euler-séta, akkor (1) mellett teljesül, hogy (2') G-nek legfeljebb 2 páratlan fokú csúcsa van ($\sum_{v\in v} |\delta(v) - \rho(v)| \leq 2$).

Tétel: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráfra G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája (Euler-sétája), ha a fenti (1) és (2) ((1) és (2')) teljesül.

Def: A G gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* egy G minden csúcsát tartalmazó kör (út).

Állítás: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponense van.

Dirac tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának legalább $\frac{n}{2}$ a fokszáma, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Ore tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u)+d(v) \geq n$, akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

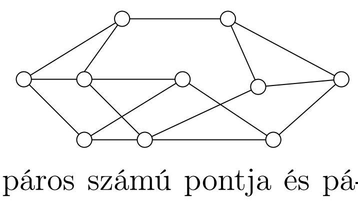
Lemma: Ha egy n-pontú G gráfban $d(u)+d(v) \geq n$, akkor G-nek pontosan akkor van Hamilton-köre, ha $G + uv$-nek Hamilton-köre van.

Köv.: Ha van Hamilton-köre egy olyan G'-nek, amit a fenti Lemmában leírt élek behúzásával kapunk G-ből, akkor G-nek is van Hamilton-köre.

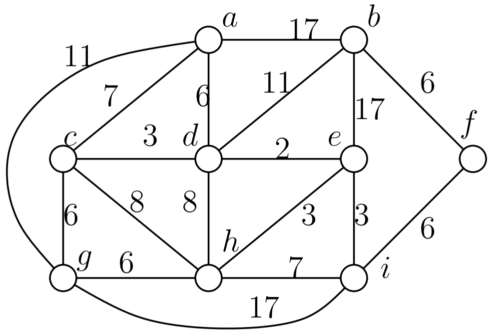
Gyakorlatok

1. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_ip_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út? (✓)(V '01)
2. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-körsétája (✓) ill. Hamilton-köre? (ZH '01)
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $G = (V, E)$ véges gráfban minden pont fokszáma páros, akkor az E élhalmaz felbontható diszjunkt körök uniójára. (!)
4. Tegyük fel, hogy $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k)$ összefüggő gráfban az E_i-k egymástól diszjunkt körséták. Az alábbi sétát végezzük az éleken. Tetszőleges pontból indulva elkezdjük követni az egyik E_i körsétát. Mindig egy E_j körsétát követünk azzal, hogy amint olyan csúcsba érünk, amin átmegy egy eddig nem látott E_ℓ körséta, akkor elkezdjük E_ℓ-t követni, majd amint befejeztük, folytatjuk a felhagyott E_j követését. Mit kapunk, amikor befejezzük az E_i körsétát?(*)
5. Mutassuk meg, hogy ha G egy 12-reguláris gráf, akkor élei pirosra és zöldre színezhetők úgy, hogy minden csúcsból pontosan 6 piros és 6 zöld él induljon. (!)
6. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges gráf élei irányíthatók úgy, hogy minden v csúcsra $|\delta(v) - \rho(v)| \leq 1$ teljesüljön, ahol $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v csúcs ki- ill. befokát jelenti.
7. Drótból szeretnénk egy 4×4-es négyzetrácsot forrasztani, ahol az egyes négyzetek oldalhossza pontosan 1 cm. Megoldható-e a feladat akkor, (a) ha 8 db 5 cm-es drótunk van ill. (b) ha 5 db 8 cm-es drótot használhatunk? A drótokat elvágni nem, csak forrasztani szabad.
8. A mellékelt ábra egy csatornahálózat vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Nem zárható ki, hogy úgynevezett endzsió terroristák egy sátáni terv keretében valahol megmérgezték a hálózatot. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy a közszolgálati csatornák élő közvetítésében egy erre a feladatra speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken.

   Mivel a szkafanderre is tapadhat méreg, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételten behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse?

   
9. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van? (✓)

10. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
11. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$. Igazoljuk, hogy X-et páros számú él köti össze $V \setminus X$-szel.
12. Van-e olyan 222 pontú G gráf, hogy G-nek és $\overline{G}$ komplementerének is van Euler-sétája? (✓)
13. A bölcsiben nyuszis-cicás dominókkal játszanak a gyerekek: a 24 darabos készlet kövei a 4-féle nyusziból és 6-féle cicából alkototható párok. Lehet-e az összes dominóból olyan kört alkotni, ahol az egymást követő köveken egymás mellett álló képek megegyeznek? (*)
14. Egy ajtót kell kinyitnunk úgy, hogy az ajtó melletti 10-gombos billentyűzeten egy előre megadott (de általunk ismeretlen) 3-jegyű számkombinációt gépelünk be. Ha minden egyes gombnyomásért 1 Ft-ot kell fizetni, akkor mennyi az a legkisebb összeg, amennyiért az ajtó bizonyosan kinyitható, bármi legyen is az ismeretlen, titkos kód? (*)
15. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (*) (ZH '16)



16. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mi a válasz valódi sakktábla esetén? (A valódi sakktábla 8×8-as.)
17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek. (✓)
18. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő. (✓)
19. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.
20. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre? (✓)
21. Igazoljuk, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
22. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk. (ZH '99)
23. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (✓) (ZH '00)
24. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle. (pZH '14)
25. 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő lánccal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást. (ZH '15)
26. Legyen G 10 csúcsú, egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek nincs Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai pedig rendre $3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9$. (pZH '16)
Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai $3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6$.
27. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út! (ZH '01) (!)