# A számítástudomány alapjai 2019. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

## Tudnivalók

**Def:** A $H$ gráf a $G$ *feszítőfája*, ha $H$ a $G$ feszítő részgráfja (azaz $V(H) = V(G)$) és $H$ fa.

**Állítás:** Tetsz. $G$ gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha $G$ összefüggő.

**Def:** Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor $G$ tetszőleges $G'$ részgráfjának *költsége* a $G'$-beli élek összköltsége.

**Kruskal (mohó) algoritmus:** Input: $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfüggvény. Output: a $G$ egy minimális költségű feszítőfájának $F$ élhalmaza. Működés: Legyen $F_0 = \emptyset$, és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, ahol $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \ldots \leq k(e_m)$. Az output $F = F_m$, ahol

$$F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{e_i\} & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_i & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

**Tétel:** A Kruskal algoritmus által kiszámított $F$ élhalmaz a $G$ egy min költségű feszítőfája.

**Def:** A $G = (V, E)$ irányított gráf egy *bejárásán* a $V$-beli csúcsok alábbiak szerinti végiglátogatását értjük. Minden $v$ csúcs állapota kezdetben *eléretlen*, majd idővel $v$ *elértté* válik, a bejárás végére pedig *befejezett* lesz. A bejárás egy általános lépése az alábbi.

1. Ha van *elért* csúcs, választunk egyet, mondjuk $u$-t. Ha van olyan $uv$ él, amire $v$ eléretlen, akkor $v$ *elértté* válik (mégpedig az $uv$ él mentén). Ha nincs ilyen $uv$ él, akkor $u$ *befejezetté* válik.
2. Ha nincs *elért* csúcs, de van *eléretlen*, akkor egy *eléretlen* csúcsot *elértté* teszünk.
3. Ha nincs se *elért*, se *eléretlen* csúcs, azaz minden csúcs *befejezett*, akkor a bejárás véget ér.

A bejárás során kialakul a csúcsok egy *elérési* ill. egy *befejezési sorrendje*, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el (ha van ilyen él). Ez utóbbi élek az ún. *faélek*, és a bejárás *fáját* alkotják (ami egyrészt irányított, másrészt pedig erdő). A $G$ gráf további $uv$ éle *előreél*, ha $u$ a bejárás fájában a $v$ őse, *visszaél*, ha $u$ a $v$ leszármazottja, egyébként pedig *keresztél.*

Irányítatlan gráf bejárása úgy történik, hogy minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.

**Köv.:** Irányítatlan gráf bejárása után az előreélek megegyeznek a visszaélekkel.

**Def:** A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy $r$ gyökércsúcs. A szélességi bejárás során az $r$ csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, valamint azt a további szabályt követeljük meg, hogy a lehető legkorábban elért csúcsból próbáljuk a soron következőnek elért csúcsot elérni. A bejáráshoz tartozó fa neve *szélességi fa.*

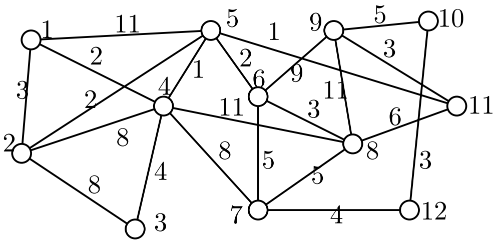
**Megfigyelés:** (1) Szélességi bejárás során az elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel. (2) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a szélességi bejárás során az elérési sorrend és $i < j < k \leq \ell$, akkor $v_i v_\ell \in E(G)$ esetén $v_j v_k$ nem lehet faél, azaz gráfél nem ugorhat át faélt.

**Köv.:** (1) Szélességi bejárás után nincs előreél.
(2) A BFS bejárás fája az $r$ csúcsból minden más csúcsba a $G$ gráf egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) legrövidebb útját tartalmazza, azaz tetszőleges $v$ csúcs $G$-beli távolsága $r$-től megegyezik az $r$ gyökerű szélességi fán mért távolsággal.

**Tétel:** A szélességi bejárás lépésszáma legfeljebb $konst \cdot (n+m)$, ahol $n = |V(G)|$ és $m = |E(G)|$.

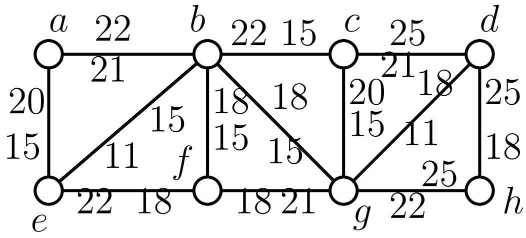
## Gyakorlatok

1. Adott egy négyzet négy csúcsa a síkon. Hogyan lehet a lehető legrövidebb összhosszúságú vonalat meghúzva elérni azt, hogy a meghúzott vonalakat követve a négy csúcs bármelyiéből el lehessen jutni minden másik csúcsba?
2. Hány feszítőfája van annak a gráfnak, amelynek csúcsai $u_1, u_2$ ill. $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és élei az összes lehetséges $u_i v_j$ párok, ahol $i = 1, 2$ ill. $j = 1, 2, \ldots, n$?
3. Keressünk a jobb oldali ábrán látható gráfban minimális költségű feszítőfát! Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak?



4. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű $F$ feszítőfát. Határozzuk meg a $G$ gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek $F$-fel a lehető legtöbb közös éle van.

5. A jobb oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen $G$ minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15)




6. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki $n$ településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az $n$ település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével lényegében ingyen meg tudná építtetni a Rátót és Piripócs közti vezetéket. Ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor $G$ minimális költségű feszítőfája egyértelmű.

8. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy $G$ minden egyes minimális költségű $F$ feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.

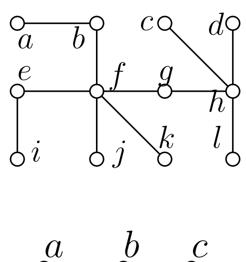
9. Milyen $k$ pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: $G$-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a $G$-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen $k$ legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)

10. Törpfalván kitört a járvány: csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?

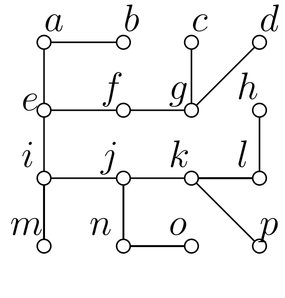
11. Rajzoljunk egy összefüggő $G$ irányítatlan gráfot, válasszuk ki egy $v$ csúcsát gyökérnek majd határozzuk meg, hogy legfeljebb hány keresztél keltkezhet a $G$ gráf egy $v$ gyökérből indított BFS bejárása után. (ZH '17 alapján)

12. Gyakoroljuk a BFS algoritmust irányított gráfon olyan $r$ gyökércsúcsból indulva, ahonnan nem érhető el $G$ minden csúcsa irányított úton.

13. A felső ábrán látható valamely $G$ gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy $b$ és $c$ szomszédosak $G$-ben? (pZH'14)




14. Az alsó ábrán látható az egyszerű, irányítatlan $G$ gráf $i$ gyökérből indított szélességi bejárása után kapott $F$ feszítőfa. Tudjuk, hogy az $e$ csúcs $G$-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a $G$ gráf $e$-ből induló éleit. (pZH'15)




15. Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy $n$ csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.

16. Tegyük fel, hogy a $G$ irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani $G$-ről?