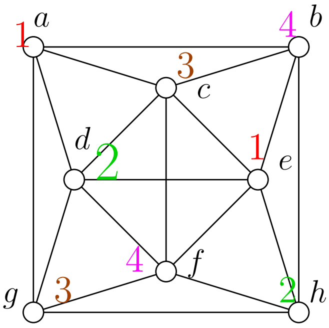
A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2018. 11. 23.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

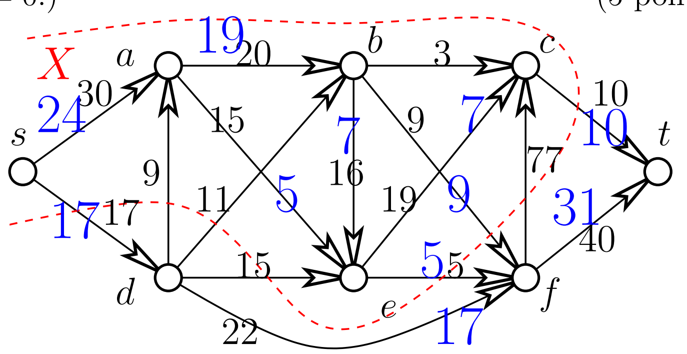
1. Mennyi a bal oldali ábrán látható G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?



Az órán tanultak miatt $\chi(G) \geq \omega(G)$, azaz a kromatikus számra alsó becslés a maximális klikkméret. (1 pont)
A G gráf „középső” négy csúcsa egy 4-pontú klikket alkot, ezért $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$, tehát a legalább 4 szín szükséges G színezéséhez. (4 pont)
Az ábrán látható a G gráf egy 4 színnel történő színezése, (3 pont)
azaz $\chi(G) \leq 4$. (1 pont)
Ezt az előző becsléssel összevetve $\chi(G) = 4$ adódik a kromatikus számra. (1 pont)

2. Van-e a jobb oldali ábrán látható hálózatban 42-nél kisebb kapacitású st-vágás?

Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 41 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (5 pont)



A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sdft$ (17), $saect$ (10), $sabft$ (9), $saeft$ (5) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)
Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 41 kapacitású. (4 pont)
Azt kaptuk, hogy **létezik** a megadott hálózatban 42-nél kisebb kapacitású st-vágás. (1 pont)

(A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 41 kapacitású st-vágást. Ha azonban nincs indoklás, és a vágás hibás, akkor az nem visz közelebb a megoldáshoz, arra tudunk csak pontot adni, ha kiderül, hogy a hallgató érti, mi az st-vágás, ill. annak a kapacitása. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont jár részpontszám. Az is teljes értékű megoldás, ha valaki megtalálja a 41 nagyságú folyamot, helyesen igazolja (de st-vágás nélkül) annak maximalitását, valamint hivatkozik a Ford-Fulkerson-tételre.)

3. Legyenek A és B a G páros gráf színosztályai. Tegyük fel, hogy $|A| = 100$, $|B| = 200$, $d(a) \geq 70$ minden $a \in A$ és $d(b) \geq 30$ minden $b \in B$ csúcsra. Igazoljuk, hogy G-nek van A-t fedő párosítása.

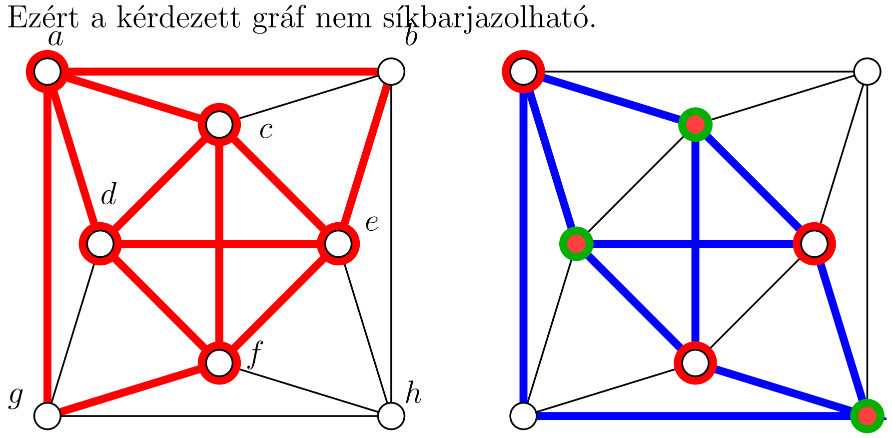
A Hall-tétel szerint pontosan akkor van A-t fedő párosítás, ha A-ra teljesül a Hall-feltétel, azaz ha $|N(X)| \geq |X|$ teljesül az A színosztály minden X részhalmazára. Ezért csupán a Hall-feltétel teljesülését kell ellenőriznünk, és pontosan ezt tesszük a továbbiakban. (2 pont)
Ha $|X| \leq 70$, akkor $|N(X)| \geq d(v) \geq 70 \geq |X|$, ahol v egy X-beli tetszőleges csúcs. A Hall-feltétel tehát fennáll ekkor. (3 pont)
Ha pedig $|X| > 70$, akkor $|A \setminus X| < 30$, ezért mind a 200 db B-beli csúcsnak van X-beli szomszédja, tekintettel arra, hogy minden B-beli fokszám legalább 30. (3 pont)

Ezért $N(X) = B$, azaz $|N(X)| = |B| = 200 \geq |X|$. A Hall-feltétel tehát ismét teljesül, és ezzel a feladat állítását igazoltuk. (2 pont)

(Az $X = \emptyset$ eset ellenőrzése hiányzik a fenti bizonyításból (a Hall-feltétel persze ilyenkor szupertriviális), de ezzel nem piszmogunk, teljes pontszám jár enélkül is.)

4. Síkbarajzolható-e a bal oldali ábrán látható gráf?

   A Kuratowski-tétel szerint pontosan akkor síkbarajzolható egy gráf, ha részgráfként nem tartalmazza sem a $K_{3,3}$, sem a K_5 egy felosztását. (2 pont)
   A bal oldali ábra egy felosztott K_5, míg a jobb oldali egy felosztott $K_{3,3}$ részgráfot mutat. (Elegendő az egyiket megtalálni.) (7 pont)
   Ezért a kérdezett gráf nem síkbarjazolható. (1 pont)



   Az első 2 pont megszerezhető azzal az indoklással is, hogy a felosztott K_5 (ill. $K_{3,3}$) nem síkbarajzolható az órán tanultak szerint.

5. Milyen maradékot ad 33-mal osztva az x egész szám, ha 12 az x 5-szörösének 33-as osztási maradéka?

   A feladatbeli kérdés az
   $5x \equiv 12(33)$ lineáris kongruencia modulo 33 megoldásával ekvivalens (2 pont)
   A 7-tel szorzás ekvivalens átalakítás, innen
   $35x \equiv 84(33)$ adódik, ami mod 33 áttéréssel
   $2x \equiv 18(33)$ alakot ölt. $(2, 33) = 1$ miatt 2-vel osztva nem változik a modulus, így kapjuk a kongruencia $x \equiv 9(33)$ megoldását. (7 pont)
   A feladat kérdésere a válasz tehát, hogy az x egész 33-as osztási maradéka 9. (1 pont)

   Aki felírja a lineáris kongruenciát, és a megoldhatóságra vonatkozó tételből levezeti, hogy pontosan egy megoldás van mod 33, az összesen 3 pontot kap. Természetesen más, elméletileg helyes módszerrel (pl az Euklideszi algoritmuson alapulóval) történő helyes megoldás is teljes pontszámot ér.

6. Tegyük fel, hogy a G páros gráf, és tegyük fel továbbá, hogy $\tau(G') = \tau(G)$ teljesül minden olyan G' páros gráfra, amely G-ből egy újabb él behúzásával jön létre. Igazoljuk, hogy G kisebbik színosztályára teljesül a Hall-feltétel.

   A Kőnig-tétel miatt minden, a feladatban leírt G' páros gráfra $\tau(G') = \nu(G')$ teljesül, és persze $\tau(G) = \nu(G)$ is igaz. (3 pont)
   Ezért a feladatbeli feltétel azt mondja ki, hogy bárhogyan is húzunk be egy újabb élt a gráf páros tulajdonságának megtartásával, a független élek maximális száma (azaz a maximális méretű párosítás mérete) ettől nem növekszik. (2 pont)
   Ha G maximális párosítása nem fedné valamelyik színosztályt, akkor be lehetne húzni G-be újabb élt a párosság megtartásával úgy, hogy a maximális párosítás mérete növekedjék. Ám a feltétel miatt ezt nem tudjuk megtenni, ezért valamelyik (értelemszerűen a kisebbik) színosztályt teljes mértékben fedi G bármely maximális párosítása. (2 pont)
   A Hall-tétel miatt viszont a kisebbik színosztályt pontosan akkor fedi minden maximális párosítás, ha arra teljesül a Hall-feltétel. (2 pont)
   Ez pedig a feladat állítását igazolja. (1 pont)