# A Számítástudomány alapjai

**1. ZH javítókulcs (2018. 10. 19.)**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.**

1. Az $1, 2, \dots, 9$ számokat hányféleképp lehet úgy sorbarendezni, hogy az első 5 szám növekedő, az utolsó 5 szám pedig csökkenő sorrendben álljon?

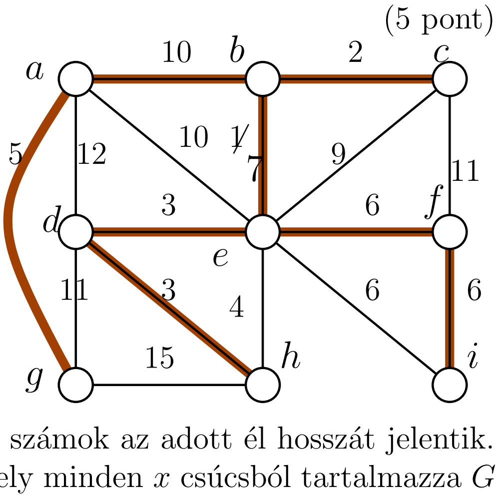
   A feladatban leírt tulajdonságú sorrend 5-dik elemének a sorrendbeli legnagyobb számnak, a 9-nek kell lennie. (2 pont)
   A sorrendbeli első 4 szám tehát az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmazból kerül ki, (2 pont)
   amire $\binom{8}{4}$ lehetőség kínálkozik. (3 pont)
   Figyeljük meg, hogy e $\binom{8}{4}$ lehetőség mindegyikéhez pontosan egy leszámlálandó sorrend tartozik: (1 pont)
   a kiválasztott 4 számot növekvő sorrendbe állítjuk, folyatjuk a 9-essel, majd a maradék 4 szám következik, csökkenő sorrendben. (1 pont)
   A fent említett $\binom{8}{4}$ lehetőség tehát kölcsönösen egyértelműen megfelel az egyes leszámlálandó sorrendektnek, a feladat kérdésére tehát $\binom{8}{4}$ a válasz. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a 22-élű $G$ gráf élei úgy vannak pirosra és zöldre színezve, hogy mind a piros, mind a zöld élek $G$ egy-egy feszítőfáját alkotják. Hány éle van a $\overline{G}$ komplementergáfnak?

   Mivel minden fának eggyel kevesebb éle van, mint a csúcsai száma, ezért $G$ mindkét feszítőfájának egyenként 11 éle van, (2 pont)
   és $G$ csúcsainak száma pedig pontosan 12. (2 pont)
   A 12 pontú teljes gráf élszáma $\binom{12}{2} = 66$, (4 pont)
   ezért a $\overline{G}$ komplementergráfnak pontosan $66 - 22 = 44$ éle van. (2 pont)

3. Legyen $G$ a bal oldali ábrán látható gráf irányítatlan változata, az élekre írt számok az adott él megépítésének költségét jelentik. Találjuk meg $G$ egy minimális költségű feszítőfáját. Legfeljebb mennyire növelhető a $be$ él megépítési költsége úgy, hogy $G$-nek legyen egy legfeljebb 42 összköltségű feszítőfája?

   Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével (az éleket növekvő költség szerint vizsgálva, és megépítve, amennyiben nem hoz létre kört a korábban megépített élekkel) az ábrán megvastagított élekkel megadott minimális költségű feszítőfát kapjuk. (5 pont)
   Ennek összköltsége 36. (1 pont)
   Ha a $be$ él költsége 7-re nő, akkor az iménti feszítőfa költsége 42 lesz, tehát a 7 költség még megengedett. (1 pont)
   Ha azonban a $be$ él költsége 7-nél csak egészen kevéssel több lenne, akkor a Kruskal algoritmus még mindig ugyanezt a fát találná meg, de az összköltség így már meghaladná a 42-t. Tehát ha a $be$ él költsége 7-nél több, akkor a minimális költségű feszítőfa költsége több 42-nél, vagyis nem építhető legfeljebb 42 összköltséggel feszítőfa. (2 pont)
   Ezért a feladat második kérdésére pontosan 7 a válasz. (1 pont)




4. Legyen $G$ a bal oldali ábrán látható irányított gráf, az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Van-e olyan, a $c$ gyökérbe befelé irányított feszítőfája $G$-nek, amely minden $x$ csúcsból tartalmazza $G$ egy legrövidebb $xc$-útját? Ha van ilyen fa, akkor határozzunk is meg egyet.

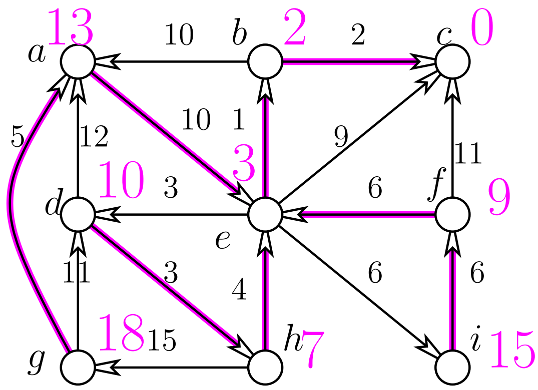
   Ha megfordítanánk minden él irányítását, akkor az így kapott gráfban keresnénk legrövidebb utat $c$-ből minden más csúcsba, így a feladat kérdése annak felelne meg, hogy van-e az így konstruált gráfban egy $c$-gyökérű legrövidebb utak fája. (2 pont)

A Dijkstra-algoritmusról tanultak szerint – tekintettel arra, hogy nemnegatívak az élhosszok – a Dijkstra algoritmus outputként éppen ilyen fát szolgáltat. (2 pont)

Ezért a feladat első kérdésére igenlő a válasz. (1 pont)

Ilyen konkrét fát pedig úgy tudunk konstruálni, hogy lefuttatjuk Dijkstra algritmusát a megfordított élekkel megadott gráfra a $c$ gyökérből. (1 pont)

Az órán tanult módszerrel ezt megtettük: ennek során a csúcsok $c, b, e, h, f, d, i, a, g$ sorrendben kerültek az $U_i$ (KÉSZ) halmazba, és az egyes csúcsok melleti szám az adott csúcstól adja meg $c$ távolságát. A megvastagított élek pedig azt jelzik, melyik élmenti javítás állította be az él kezdőpontjára a fenti távolságot. Ezen megvastagított élek alkotják a keresett legrövidebb utak fáját. (4 pont)




5. Tegyük fel, hogy $G$ egyszerű gráf, és fokszámsorozata $8, 8, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2$. Igazoljuk, hogy $G$-nek nincs Hamilton-köre.

   A kérdezett gráfnak 9 csúcsa van, és ebből két csúcs fokszáma 8, azaz minden más csúccsal össze vannak kötve. (3 pont)

   Ha tehát e két csúcsot töröljük a gráfból, akkor az így kapott $G'$ gráf fokszámsorozatára $2, 2, 2, 1, 1, 0, 0$ adódik. (3 pont)

   Ez azt jelenti, hogy két izolált pont mellett lesz még legalább egy komponense $G'$-nek, (1 pont)
   azaz $G$-ből két alkalmas csúcs elhagyásával legalább három komponens keletkezik. (1 pont)

   Ezért a Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel nem teljesül $G$-re, így $G$-nek bizonyosan nincs Hamilton-köre. (2 pont)

$\boxed{\star}$ Legfeljebb hány éle lehet annak az egyszerű $G$ gráfnak, amelynek bármely BFS bejárás után kapott feszítőfája izomorf a jobb oldali ábrán látható gráffal?

A BFS bejárás definíciójából adódóan a BFS bejárás után kapott szélességi fa gyökerének fabeli fokszáma megegyezik a gráfbelivel. (2 pont)

Ezért a $G$ gráfnak nem lehet 3-nál nagyobb fokú csúcsa (2 pont)

Mivel $G$-nek 8 csúcsa van, ezért a $G$-beli fokszámösszeg legfeljebb $8 \cdot 3 = 24$, (1 pont)

ezért a handshake lemma miatt $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \leq 12$ . (1 pont)

Könnyen látható, hogy a kocka csúcsai és élei alkotta gráf bármely szélességi fája izomorf a megadott fával, vagyis van olyan 12-élű, egyszerű gráf, amely megfelel a feladatbeli feltételnek. (3 pont)

A feladat kérdésére a válasz tehát pontosan 12. (1 pont)