A Számítástudomány alapjai

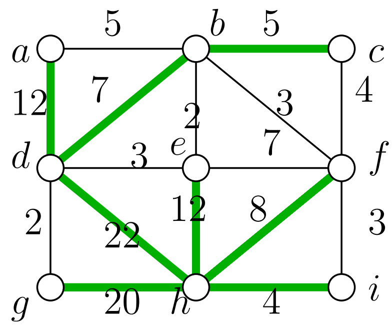
1. pZH javítókulcs (2018. 12. 12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy G olyan 9 csúcsú, egyszerű gráf, amelyben a fokszámok $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2$. Igazoljuk, hogy G összefüggő.

   Megmutatjuk, hogy G-nek egy komponense van, és ebből következik, hogy G összefüggő. (1 pont)
   Mivel G minden csúcsának legalább 2 a fokszáma, G minden komponense legalább 3 csúcsot tartalmaz. (2 pont)
   G bármely három csúcsa között van legalább harmadfokú, ezért G bármely komponense legalább 4 csúcsot tartalmaz. (2 pont)
   Az 5-fokú csúcsoknak olyan komponensben kell lenniük, amelyben legalább 6 csúcs van. (2 pont)
   A G gráf 9 csúcsát nem lehet legalább két komponensben úgy elhelyezni, hogy mindegyik komponensben legalább 4 csúcs legyen, de legyen egy legalább 6 csúcsú komponens is. (2 pont)
   Ezek szerint G-nek csakugyan egy komponense van, így G összefüggő. (1 pont)

2. Az ábrán látható G gráf minden egyes élének megépítési költsége 6, az élre írt szám pedig azt mutatja, mennyi támogatást kapunk akkor, ha megépül az adott él. Lefeljebb mennyi haszon realizálható, ha megépítjük G egy alkalmasan választott feszítőfájának minden élét?

   Mivel pontosan 8 db élt kell megépíteni, az összköltség fix, egész pontosan 48. A cél tehát a 8 élhez tartozó össztámogatás maximalizálása. (2 pont)
   Ez pedig úgy érhető el, hogy Kruskal algoritmusát a támogatások csökkenő sorrendjében futtatjuk. (4 pont)
   Az algoritmus végrehajtása után az ábrán látható feszítőfát kapjuk. (3 pont)
   A hasznunk pedig az így realizált össztámogatásnál (90-nél) 48-cal kevesebb, azaz pontosan 42. (1 pont)

   Az is tökéletes megoldás, ha az egyes élköltségeket beállítjuk 6 mínusz az élre írt számnak, és az így kapott (néhol negatív) élköltségekre futtatjuk a Kruskalt. A kapott feszítőfa negatív összköltségének (-1)-szerese a válasz, természetesen 42.

3. Az ábrán látható G gráf a csúcsából indított mélységi (DFS) bejárása után hány visszaél keletkezik? Milyen határok közt változik a visszaélek száma, ha G egy másik csúcsából indítjuk a mélységi bejárást? (Irányítatlan esetben a visszaél és az előreél ugyanaz.)

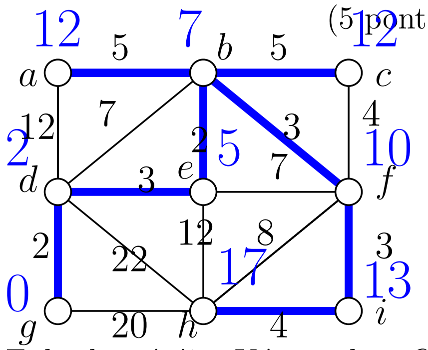
   Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráf DFS bejárásakor nem keletkezik keresztél. (2 pont)
   Ezek szerint G DFS bejárása után csak faélek és visszaélek lesznek, (1 pont)
   faélből pedig pontosan 8 db keletkezik, hiszen azok feszítőfát alkotnak a 9 csúcson. (1 pont)
   Ezért az a-ból indított DFS után pontosan $16 - 8 = 8$ visszaél keletkezik. (2 pont)
   Ez persze ugyanígy igaz akkor is, ha nem a-ból indul a bejárás, tehát a feladat második kérdésére az a válasz, hogy ez a szám mindig pontosan 8. (4 pont)

   Ha valaki helyesen végrehajtja a-ból indulva a DFS-t, és leszámlálja a visszaéleket, de nem nyilatkozik más csúcsokból indított DFS-ről, az 6 pontot érdemel.

4. Az ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él hosszát jelentik. Csökken-e G valamelyik csúcsának g-től számított távolsága akkor, ha a cf él hosszát 1-re csökkentjük?

Az órán tanult Dijkstra-algoritmust alkalmazva, a triviális felső becslésből kiindulva, a legkisebb becsléssel rendelkző csúcsokat egyenként a KÉSZ halmazba pakolva, a KÉSZ halmazba került csúcsból a KÉSZ halmazt elhagyó élek mentén élmenti javításokat végezve kiszámítjuk a g csúcstól minden egyes csúcs távolságát. (1 pont)

Az ábra a kapott legrövidebb utak fáját mutatja, az egyes csúcsok mellett álló szám pedig az adott csúcs g-től mért távolságát jelenti. (5 pont)



A kapott értékek nyilván akkor is felső becslést adnak a csúcsok g-től mért távolságára, ha a cf él hosszát 1-re csökkentjük. Mivel a cf él mentén lehet élmenti javítást végezni a lecsökkentett 1-es élhossz esetén, (2 pont)

ezért az van olyan csúcsa G-nek (konkrétan a c csúcs), amelynek csökken ezáltal a g-től mért távolsága. (2 pont)

Az is helyes megoldás, ha a csökkentés után újabb Dijkstra-t futtatunk, és úgy állapítjuk meg, hogy van változás.

5. Tegyük fel, hogy G olyan 100 csúcsú, egyszerű gráf, amelynek van Euler-körsétája. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy G-hez egy v izolált pontot adunk. Van-e a $\overline{G'}$ komplementergáfnak Euler-körsétája?

Az órán tanultak miatt a $\overline{G'}$ gráfnak van Euler-körsétája, ha $\overline{G'}$ összefüggő és minden csúcsának a fokszám páros. (3 pont)

Mivel a $\overline{G'}$ gráf v csúcsa apex (minden más csúccsal szomszédos), ezért $\overline{G'}$ összefüggő. (2 pont)

Tekintettel arra, hogy G-nek van Euler-körsétája, G minden csúcsa páros fokszámú. (1 pont)

Ezért ha u a G egy csúcsa, akkor u fokszáma $\overline{G}$-ben $99-u$, az $\overline{G'}$ gráfban pedig $100-d(u)$, ami páros. (2 pont)

A v csúcs fokszáma $\overline{G'}$-ben pontosan 100, ami szintén páros. (1 pont)

A fent idézett tanulmányaink szerint tehát a $\overline{G'}$ gráfnak van Euler-körsétája. (1 pont)

6. Hány Hamilton-köre van annak a G gráfnak, amelynek 10 piros, 10 fehér és egy zöld csúcsa van, élei pedig a különböző színű csúcsokat kötik össze az összes lehetséges módon?

Legyen z a zöld csúcs. Ha C a G egy Hamilton-köre, akkor $C-v$ a $G-v$ egy Hamilton-útja. Márpedig $G-v$ minden Hamilton útja a piros és fehér csúcsokat felváltva tartalmazza, tehát e Hamilton-út két végpontja ellentétes színű. Ez pedig azt jelenti, hogy G bármely Hamilton-körében a z csúcs szomszédai különböző színűek. (3 pont)

A Hamilton-körök leszámlálásához úgy generáljuk e köröket, hogy z-ből a piros csúcs felé indulva választjuk a kör soron következő csúcsait. (3 pont)

Az első két csúcsot $10-10$-féleképp választhatjuk, a következő kettőt $9-9$-féleképp, sít, függetlenül a korábbi választásainktól. (2 pont)

Mivel minden egyes Hamilton-kört pontosan egyféleképp generál ez a módszer, G Hamilton-köreinek száma e választási lehetőségszámok szorzata lesz, azaz $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = 10!^2$. (2 pont)

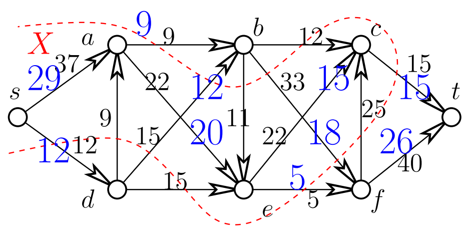
A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2018. 12. 12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Határozzunk meg egy maximális nagyságú st-folyamot az ábrán látható hálózatban.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 41 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (4 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (9), $sdeft$ (5), $sdbft$ (7), $saect$ (6), $saedbft$ (5), $sdaecbft$ (9) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

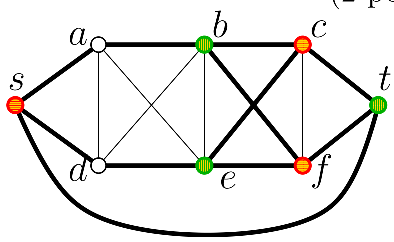
   

   Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 41 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 41 nagyságú folyam és 41 kapacitású st-vágás, ezért a maximális folyamnagyság pontosan 41. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 41 nagyságú st-folyamot ill. ugyanekkora kapacitású st-vágást. Ha azonban valamelyik ezek közül hibás, akkor nincs megindokolva az optimalitás. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont egyértelműen jár részpontszám.)

2. Síkbarajzolható marad-e az ábrán látható gráf irányítatlan változata az st él behúzása után?

   Az ábrán a G gráf egy $K_{3,3}$-mal izomorf részgráfja látható. (8 pont)
   Mivel a $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, ezért G sem az. (2 pont)

   A Kuratowski-tételre történő helyes hivatkozás, amennyiben a hallgató nem talál tiltott részgráfot, 2 pontot ér. Az is tökéletes megoldás, ha valaki hivatkozik a K_5 nem síkbarajzolható tulajdonságára és arra, hogy az élösszehúzás megőrzi a síkbarajzolhatóságot, valamint észreveszi, hogy az st élt összhúzva lesz a gráfban topologikus K_5.

3. Igazoljuk, hogy ha F egy 100 csúcsú fa, akkor az F-beli független ponthalmazok maximális méretére $\alpha(F) \geq 50$ teljesül.

   Az F fa páros gráf, (3 pont)
   ezért csúcsai két színnel színezhetők. (2 pont)
   Ezért valamelyik színosztály legalább 50-et tartalmaz az F fa 100 csúcsából, (2 pont)
   és ezen pontok független ponthalmazt alkotnak. (1 pont)
   A független ponthalmaz maximális méretére tehát $\alpha(F) \geq 50$ teljesül, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolni. (2 pont)

4. Melyek azok az 1 és 100 közé eső pozitív egészek, amelyek 42-szerese 66-ra végződik?

   Legyen x ilyen szám. A feladatbeli tulajdonság azzal egyenértékű, hogy $42x \equiv 66(100)$. (2 pont)
   Ezt a lineáris kongruenciát oldjuk meg. 6-tal osztás után $7x \equiv 11(50)$ adódik, (3 pont)

A 7-tel szorzás ekvivalens átalakítás, amiből $49x \equiv 77(50)$ adódik, (2 pont)
amit $-x \equiv -23(50)$ alakba írhatunk. (1 pont)
A kongruencia megoldása tehát az $x \equiv 23(50)$, (1 pont)
és az $1 \leq x \leq 100$ feltételt figyelembe véve pontosan két egész szám adódik megoldásnak: az $x = 23$ és az $x = 73$. (1 pont)

5. Hány olyan $m > 1$ egész szám létezik, amelyre a $7x \equiv 7(m)$ kongruenciának megoldása az $x = 7$?

   A konguencia definíciója szerint pontosan akkor megoldás az $x = 7$, ha $m \mid 7 \cdot 7 - 7 = 42$ teljesül. (4 pont)
   Ez azt jelenti, hogy a válasz a 42 1-nél nagyobb osztói száma. (2 pont)
   Mivel $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, ezért az órán tanultak szerint $d(42) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ a 42 pozitív osztói száma. (2 pont)
   ezek közül csak az 1-nél nagyobbak érdekelnek minket, (1 pont)
   így $1 \mid 42$, miatt a keresett m-ek száma éppen $8 - 1 = 7$. (1 pont)

6. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa úgy van kiszínezve a piros és zöld színek valamelyikére, hogy G-nek nincs olyan páratlan hosszúságú köre, amelynek csúcsai egyszínűek. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül.

   Mivel az azonos színűre színezett csúcsok nem alkotnak páratlan kört, ezért a piros csúcsok is és a zöld csúcsok is páros gráfot feszítenek G-ben. (4 pont)
   Ezek szerint az eredetileg piros csúcsokat ki lehet színezni két színnel (mondjuk tulipirossal és karmazsinnal) úgy, hogy egyetlen élnek se legyen mindkét végpontja tulipiros vagy karmazsin. (3 pont)
   Hasonlóan, az eredetileg zöldre színezett csúcsok kiszínezhetők a keki és libazöld színekre úgy, hogy egyetlen élnek se legyen azonos zöld árnyalatú a két végpontja. (1 pont)
   Mivel a G gráf csúcsait a fentiek szerint 4 színnel színeztük úgy, hogy minden él különböző színű csúcsokat köt össze, ezért G kromatikus számára $\chi(G) \leq 4$ teljesül. (2 pont)