A számítástudomány alapjai 2018. I. félév

4. gyakorlat Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza, $dist(u, v)$ pedig az (ir) uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli. Az ℓ hosszfv *konzervatív*, ha nincs G-ben negatív összhosszú (ir) kör.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf, $r \in V$ és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. A $d : V \to \mathbb{R}$ függvényt *(r, ℓ)-felső becslés*nek nevezzük, ha $d(v) \geq dist(r, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az *$e = vw$ él menti javítás* azt jelenti, hogy a $d(w)$ értéket a $\min\{d(w), d(v) + \ell(vw)\}$ értékkel helyettesítjük.

Megfigyelés: (1) Tetsz. (r, ℓ)-felső becslés élmenti javítás után is (r, ℓ)-felső becslést marad.
(2) Ha élmenti javítás nem tud változtatni a d (r, ℓ)-felső becslésen, akkor $d(v) = dist(r, v)$ $\forall v \in V$.

Dijkstra-algoritmus Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $r \in V$ gyökér. Output: $dist(r, v)$ minden $v \in V$-re és egy „legrövidebb utak fája”. Működés: Kezdetben $U_0 := \emptyset$, $d(r) = 0$ és $v \neq r$ esetén $d(v) = \infty$. Az algoritmus i-dik fázisában $(i = 1, 2, \ldots)$ a következő történik.
1. A legyen u_i az a v csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $d(v)$ minimális és legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$.
2. Végezzünk él menti javításokat minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen. 3. $i := i + 1$
Ha $|V| = n$, akkor az n-dik fázis után $dist(r, v) = d(v)$ teljesül minden $v \in V$-re. Ha minden r-től különböző v csúcshoz feljegyezzük, melyik élmenti javításból származik a végső $d(v)$ érték, akkor az így megjelölt élek alkotják a legrövidebb utak fáját.

Megfigyelés: Ha d a végső (r, ℓ)-felső becslés, akkor (1) $d(u_i) \leq d(u_{i+1})$ $\forall 1 \leq i < n$-re
(2) $d(u_1) \leq d(u_2) \leq \ldots \leq d(u_n)$, valamint (3) Élmenti javítás nem változtat d-n.

Köv.: A Dijkstra algoritmus helyesen működik, és lépésszáma legfeljebb $konst \cdot n^2$.

Ford-algoritmus Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}$ konzervatív hosszfv, $r \in V$ gyökérpont. Output: $dist(r, v)$ minden $v \in V$-re. Működés: Legyen $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Kezdetben legyen $d(r) = 0$ és $v \neq r$ esetén $d(v) = \infty$. Az i-dik fázis $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén abból áll, hogy elvégezzük az $e_1, e_2, \ldots, e_m$ élek menti javításokat. A végén az output $dist(r, v) = d(v)$ minden v-re.

Állítás: (1) A Ford algoritmus i-dik fázisa után $dist(r, v) = d(v)$ minden olyan v-re, ahova van legfeljebb i élű legrövidebb út v-ből. (2) A Ford algoritmus lépésszáma legfeljebb $c \cdot n^3$. (3) Ahogy Dijkstra esetén, itt is legrövidebb utak fáját alkotják a végső $d(v)$ értékeket beállító élek.

Floyd-algoritmus Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}$ konz. Output: $dist(u, v)$ $\forall u, v \in V$. Működés: Legyen $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és $d^{(k)}(i, j)$ a legrövidebb olyan $v_i v_j$ út hossza, aminek belső pontjai csak $v_1, v_2, \ldots v_k$ lehetnek. Kezdetben $d^{(0)}(i, j) = \ell(v_i, v_j)$, ha $v_i v_j \in E$, különben $d^{(0)}(v_i, v_j) = \infty$. A k-dik fázisban

$$d^{(k)}(i, j) = \min\{d^{(k-1)}(i, j), d^{(k-1)}(i, k) + d^{(k-1)}(k, j)\} \qquad (1)$$

alapján a $d^{(k)}$ függvényt határozzuk meg. Az n-dik fázis után $dist(v_i, v_j) = d^{(n)}(i, j)$ az output.

Állítás: Az (1) fennáll, tehát a Floyd algoritmus helyes. Lépésszáma pedig legfeljebb $konst \cdot n^3$.

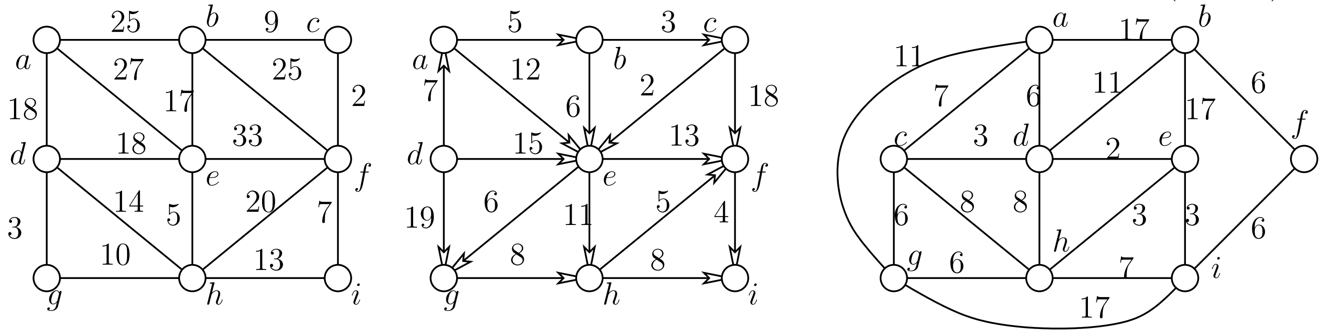
Def: Ha $G = (V, E)$ gráfon $w : E \to \mathbb{R}_+$ szélességfüggvény, akkor egy P út *szélessége* a legkeskenyebb P-beli él szélessége: $w(P) := \min\{w(e) : e \in E(P)\}$.

Tétel: Ha G irányítatlan és w egy szélességfüggvény, akkor a Kruskal algoritmust csökkenő szélesség szerinti sorrendben futtatva olyan fát kapunk, amely bármely két csúcs között egy legszélesebb G-beli utat tartalmaz.

Gyakorlatok

1. Rajzoljunk gráfot, és keressük meg egy csúcsból kiindulva a BFS fáját. Megfelelő élhosszok megadásával gyakoroljuk a Dijkstra, Ford és Floyd algoritmusokat. Keressünk legszélesebb utakat irányítatlan gráfokban. Bátran használjuk ehhez a túloldali gráfokat.
2. Legyen $G = (V, E)$ (irányított) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény és legyenek u, v, w a G csúcsai. Igazak-e az alábbi állítások? (1) Ha P a G egy legrövidebb uv útja és w csúcsa P-nek, akkor a P út u-tól w-ig tartó ill. w-től v-ig tartó részei a G egy legrövidebb uw- ill. wv-útját alkotják. (2) Ha P_1 és P_2 a G egy legrövidebb uw- ill. wv-útja, akkor a P_1 és P_2 egymás után fűzése a G egy legrövidebb uv-útja lesz.
3. Tervezzünk csavaranyákból és cukorspárgából gravitációs elven működő mechanikus számítógépet úgy, hogy alkalmas legyen az inputként megadott, nemnegatív élhosszokkal rendelkező irányítatlan gráf tetszőleges gyökérpontjából a többi csúcs távolságának a meghatározására.

4. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_i v_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a $v_i v_j$ él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van. (pZH '14)
5. Legyenek a 7 csúcsú G gráf pontjai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ és v_9, valamint akkor legyen v_i és v_j szomszédos, ha i és j relatív prímek. Ekkor a $v_i v_j$ él szélessége $|i - j|$. Határozzunk meg a v_1 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legszélesebb utat. (ZH '14)
6. Legyen G a bal oldali ábrán látható gráf, az élekre írt számok az adott él szélességét jelentik. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely G bármely két csúcsa között tartalmazza G egy legszélesebb útját? Ha van ilyen fa, akkor adjunk meg egyet. (ZH '16)
7. Ismét a bal oldali ábrán látható gráfot vizsgáljuk. Most az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e-től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat. (ZH '16)



8. Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf élein egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény. Igaz-e, hogy ha P a G egy legrövidebb uv-útja az ℓ hosszfüggvényre, akkor P egyúttal legrövidebb út az ℓ' hosszfüggvényre is, ahol $\ell'(e) = \ell(e)^2$ teljesül G minden e élére? (ppZH '14)
9. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, valamint egy r gyökérpont. Egyetlen Dijkstra algoritmus lefuttatása segítségével találjuk meg G mindazon e éleit, amelyekre igaz az, hogy önmagában attól, hogy e hosszát eggyel csökkentjük egyetlen csúcs r-től mért távolsága sem csökken.
10. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény valamint egy $e = uv \in E$ él. Javasoljunk gyors eljárást annak a maximális λ értéknek a meghatározására, amennyivel G két csúcsának a távolsága megnövekszik akkor, ha töröljük az e élt G-ből.
11. Forintot szeretnénk különféle valutákra átváltani. Külföldön élő ismerőseink révén nem csak forintot, hanem számos más valutát is közvetlenül át tudunk váltani bizonyos valutákra. A cél, hogy esetleg ilyen átváltások felhasználásával minél jobb árfolyamot érjünk el a forintunk konverziója során. E célból elkészítettünk egy irányított gráfot, aminek a csúcsai az egyes valutáknak, az élek pedig az egyes közvetlen tranzakcióknak felelnek meg. Minden uv élhez ismert az adott váltásnál alkalmazott árfolyam, azaz, hogy hány egységet kell fizetnünk az u pénznemben a v pénznem egy egységéért. Adjunk hatékony módszert arra, hogy meghatározzuk, legfeljebb mennyit kaphatunk az egyes valutákból 1 Ft-ért, ill. határozzuk meg azt is, milyen átváltásokat kell ehhez végeznünk.
12. (*) Adott $n \times k$ méretű táblázat minden mezőjében 0 vagy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan utat, amire igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni? (Hint: alighanem vmiféle gráfban kéne legrövidebb utat keresni.)
13. (*) Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény, $e = uv$ pedig G egy éle. Javasoljunk gyors eljárást, amelynek segítségével megtalálhatók G mindazon w csúcsai, amelyek számára *fontos* az e él. (Az e él akkor fontos w számára, ha van olyan t csúcs G-ben, amelynek a w-től mért távolsága csökken, az $\ell(e)$ bármilyen kis mértékű csökkentése nyomán.)