A számítástudomány alapjai 2018. I. félév

13. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Fermat-teszt Adott n számról kell eldönteni, prím-e egy véletlen $1 < a < n$ szám segítségével. Ha $(n, a) > 1$, akkor n nem prím, és a az n *leleplezője*, mert egy osztót is megtudunk a segítségével. Ha $(n, a) = 1$, akkor ha $a^{n-1} \not\equiv 1(n)$, akkor a az n *árulója*, és n bizonyosan nem prím az Euler-Fermat tétel miatt. Míg ha $a^{n-1} \equiv 1(n)$, akkor a az n *cinkosa*, és n „valószínűleg" prím.

Állítás: Ha n-nek van árulója, akkor tetsz. mod n RMR tagjainak legalább a fele áruló.

Def: Az n *Carmichael szám*, ha n összetett, de nincs árulója.

Def: Az $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció *egyirányú függvény*, ha f gyorsan számítható, de az f^{-1} kiszámítása pusztán f ismeretében reménytelen. Az f egyirányú függvény *kiskapus egyirányú függvény*, ha létezik f^{-1} kiszámítására is hatékony módszer (amit persze pusztán az f-et számító algoritmus ismeretében reménytelen megtalálni).

Nyilvános kulcsú titkosírás Egy M üzenetet akarunk kódolni. Feltehető, hogy M egy 0 és n közötti szám. (Ez úgy érhető el, hogy az üzenet ASCII kódját megfelelő méretű blokkokra daraboljuk, és a darabokat 2-es számrendszerbeli számként értelmezzük.) Értelmes konvenció, hogy minden üzenetdarab utolsó néhány bitje random sorozat. A címzett közzéteszi az f kiskapus egyirányú függvényét, amit bárki könnyen kiszámíthat. Az f^{-1} hatékony kiszámítására csak a címzett képes. A feladó az M üzenet helyett az $X = f(M)$-t küldjük el, mert ebből egyedül a címzett képes kiszámítani $f^{-1}(X) = f^{-1}(f(M)) = M$ üzenetet.

Digitális aláírás Az A játékos szeretne B-nek egy M üzenetet úgy elküldeni, hogy B biztos legyen abban, hogy azt A küldte. Legyenek f_A ill. f_B a nyilvános titkosítófüggvényeik. Az M üzenet A által aláírt változata $M' = f_A^{-1}(M)$. Erről bárki ellenőrizheti az $f^{-1}(M')$ kiszámításával, hogy az M-nek az A által kódolt változatáról van szó, tehát ezt csakis A írhatta alá. Ha ezt B-nek titkosítva akarja elküldeni, akkor az $X = f_B(f_A^{-1}(M))$ üzenetet küldi, amit csak a B címzett képes megfejteni, hisz $M = f_A(f_B^{-1}(X)))$. B mások számára is bizonyítani tudja, hogy az M üzenetet A aláírta, mégpedig $f_B^{-1}(M') = f_A^{-1}(M)$ megadásával, ami az A által aláírt üzenet.

Az RSA eljárás Legyenek p, q prímek, $n = pq$, $m = \varphi(n) = (p-1)(q-1)$. Legyen $e > 1$ olyan, amire $(e, m) = 1$, és legyen d $ex \equiv 1(m)$ kongruencia megoldása. A nyilvános kulcs (n, e), a titkos kulcs (n, d). Az f kódolófüggvényt az $M \mapsto M^e (\text{mod } n)$, az f^{-1} dekódolófüggvényt pedig az $X \mapsto X^d (\text{mod } n)$ hozzárendelés írja le.

Gyakorlatok

1. Döntsük el, hogy az 5 cinkosa vagy árulója az $n = 42$-nek.
2. Van-e az $n = 42$-nek az $a = 1$-en kívül cinkosa?(*) Hát az $n = 49$-nek?
3. Igazoljuk, hogy 561-nek nincs árulója, azaz Carmichael szám: $(a, 561) = 1 \Rightarrow a^{560} \equiv 1(561)$.
4. Az angol ABC betűit a $0, 1, \ldots, 25$ számok kódolják: $A = 0, B = 1, \ldots Z = 25$. Sikerült elfogni az RSA titkosítással kódolt $59, 2, 59, 20, 44, 52$ üzenetet, amit afeladó betűnként kódolt az oktondi címzett $(85, 43)$ nyilvános kulcsával. Törjük fel a kódot, fejtsük meg az üzenetet.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az RSA eljárás nyilvános kulcsa (n, e) a titkos pedig (n, d), akkor tetszőleges M üzenet esetén akkor is jól működik az eljárás, ha M nem relatív prím n-hez. Azaz: teljesül tetszőleges M üzenet $X \equiv M^e(n)$ titkosítására $M \equiv X^d(n)$ teljesül.
6. Legyen $n = p \cdot q \cdot r$, ahol p, q, r különböző prímek, és legyen $m = (p-1)(q-1)(r-1)$, valamint $(e, m) = 1$. Jó kódolást kapunk-e az (n, e) nyilvános kulccsal? Ha igen, akkor határozzuk meg a megfelelő titkos kulcsot.
7. Egy lakattal lezárható ládában szeretnénk titkokat küldeni az ismerősünknek. Sajnos azonban a postás minden olyan küldeményt felnyit, amit csak tud, és amit abban talál, azt ellopja vagy lemásolja. Mindkettőnknek van lakatunk, megfelelő kulcsokkal, de egyikünk sem rendelkezik olyan kulccsal, amihez való lakat a másiknál van. Hogyan oldható meg a biztonságos csomagküldés?
8. A és B üzletelnek. A k-féle információt árul B-nek, mindegyiket ugyanannyiért. B úgy szeretne vásárolni, hogy A ne tudja meg, mire kíváncsi. Hogyan járhatnak el?(*)
9. Alakítsuk át úgy az euklideszi algoritmust úgy, hogy abban csak olcsó műveletekre, azaz összeadásra és 2-vel oszásra legyen szükség, maradékos osztásra ne (és persze gyorsan adjon helyes eredményt).(*)