

A számítástudomány alapjai 2018. I. félév

12. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: *Döntési probléma* az olyan probléma, amelyek outputja egyetlen bit, azaz minden értelmes inputhoz az „IGEN” vagy a „NEM” outputok valamelyike tartozik. A P problémaosztályt mindazon döntési problémák alkotják, amelyekre van polinomidejű algoritmus.

Def: NP -beli probléma alatt olyan Π döntési problémát értünk, amelyhez minden olyan inputra, amelyre „IGEN” az output, ez a tény polinomidőben bizonyítható. Formálisan: $\Pi \in NP$, ha létezik egy A algoritmus az alábbi tulajdonságokkal. (1) Az A algoritmus inputja tetszőleges I, T pár, és az A algoritmus lépésszáma felülről becsülhető I méretének polinomjával. (Tehát T -től nem függ.) (2) A Π minden olyan I inputjához, amelyhez „IGEN” a helyes output, létezik olyan T tanú, hogy az A algoritmust az (I, T) inputtal elindítva „IGEN” választ ad, valamint (3) minden olyan I inputhoz, amelyhez „NEM” a helyes output, A az (I, T) inputon minden T -re „NEM” választ ad.

A $co - NP$ -beli problémaosztályt azon Π döntési problémák alkotják, amelyekhez a „NEM” válaszra polinomidőben ellenőrizhető tanú.

Megfigyelés: $P \subseteq NP \cap co - NP$.

Def: A Π probléma *polinomidőben visszavezethető* a Π' problémára (jelölése $\Pi \preceq \Pi'$), ha a Π tetszőleges I inputjához polinomidejű algoritmussal konstruálható a Π' problémának olyan I' inputja, melyre (Π' -ben) ugyanaz a válasz, mint I -re Π -ben.

Megfigyelés: (1) $\Pi \preceq \Pi' \preceq \Pi'' \Rightarrow \Pi \preceq \Pi''$. (2) $\Pi \preceq \Pi' \in P \Rightarrow \Pi \in P$.

Def: A Π döntési probléma *NP -nehéz*, ha $\Pi' \preceq \Pi$ minden $\Pi' \in NP$ esetén, azaz minden NP -beli probléma visszavezethető Π -re. A Π *NP -teljes*, ha $\Pi \in NP$ és Π NP -nehéz.

Megfigyelés: Ha Π NP -teljes és $\Pi \preceq \Pi' \in NP$, akkor Π' is NP -teljes.

Def: A SAT probléma inputja egy CNF (konjunktív normálforma), outputja „IGEN”, ha az inputban szereplő logikai változók logikai értéke megválasztható úgy, hogy az adott CNF kiértékelése igaz legyen. Minden CNF klózek összeesélése, minden klóz literálok összevagyolása és minden literál azonos valamelyik logikai változóval vagy annak negáltjával.

Példa: : $(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7) \wedge (x_2 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_4 \vee x_5 \vee x_7) \wedge (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_6)$

Cook-Levin-tétel: A SAT probléma NP -teljes.

A Cook-Levin-tétel miatta világ kétféle lehet. Vagy $P = NP$, és ekkor minden NP -beli problémára van polinomidejű algoritmus. Így van P -beli NP -teljes probléma is. Sőt: elég egyetlenegy ilyen találni, és akkor ebből következik a $P = NP$ igazsága. Vagy $P \neq NP$, és ekkor minden NP -teljes probléma reménytelen abban az értelemben, hogy bizonyosan nincs rá polinomidejű algoritmus. Ez utóbbiban hisz a többség.

További NP -teljes problémák: (1) HAM (Input: G gráf, output: „IGEN”, ha G -nek van Hamilton köre), (2) 3-SAT (a SAT speciális esete, ahol minden klóz pontosan 3 db literált tartalmaz), (3) 3-SZÍN (Input: G gráf, output: „IGEN”, ha $\chi(G) \leq 3$), (4) $k \geq 3$ esetén a k -SZÍN (Input: G gráf, output: „IGEN”, ha $\chi(G) \leq k$), (5) MAXFTN (Input: G gráf, $k > 0$ egész, output: „IGEN”, ha $\alpha(G) \geq k$) (6) MAXKLIKK (Input: G gráf, $k > 0$ egész, output: „IGEN”, ha $\omega(G) \geq k$)

Gyakorlatok

- Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák P -beliek:
 - Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e benne kör.
 - Adott G irányítatlan gráfról és k pozitív egészlől döntsük el, van-e olyan részgráfja, amiben minden fok $\geq k$.
 - Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e K_{10} részgráfja.
 - Adott G öf gráfról és $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e, hogy G bármely feszítőfájának a költsége legalább k .
 - 2-SAT (A SAT probléma, ahol minden klóz legfeljebb két literált tartalmaz.)
- Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP -beliek:
 - Adott G irányítatlan gráfról és k pozitív egészlől döntsük el, van-e k -reguláris részgráfja.
 - Adott G öf gráfról és $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e, hogy G -nek van pontosan k költségű feszítőfája.

- (c) Adott G gráfról és $l : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ (esetleg negatív) élhosszokról döntsük el, igaz-e, hogy G bármely két csúcsának a távolsága legfeljebb k
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák $co - NP$ -beliek:
- (a) Adott G gráfról döntsük el, síkbarajzolható-e.
 - (b) Adott $2n$ csúcsú G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy bármely n csúcsa páros gráfot feszít.
 - (c) Adott G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy $\omega(G) \leq k$.
 - (d) Adott n számról döntsük el, hogy prímszám-e.
4. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák $NP \cap co - NP$ -beliek:
- (a) Adott G gráfról döntsük el, páros-e.
 - (b) Adott G gráfról döntsük el, összefüggő-e.
 - (c) Adott G páros gráfról döntsük el, van-e teljes párosítása.
 - (d) Adott hálózatról döntsük el, van-e benne k nagyságú folyam.
 - (e) Adott n és k egészekről döntsük el, relatív prímszám-e.
5. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP -teljesek:
- (a) FÉLHAM inputja egy G gráf, outputja „IGEN”, ha G -nek van olyan köre, ami G csúcsainak legalább a felét tartalmazza
 - (b) FELE-3-SZÍN inputja egy G gráf, outputja „IGEN”, ha G -nek van olyan 3-színezhető feszített részgráfja, amely G csúcsainak legalább a felét tartalmazza.
 - (c) MAXTÁV inputja egy $G = (V, E)$ gráf, egy $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény valamint egy $k \in \mathbb{R}_+$ szám. Az output akkor „IGEN”, ha G -ben van legalább k összhosszú út.
6. Az alábbi döntési problémák mindegyikéről döntsük el, hogy a $P, NP, co - NP, NP - teljes$ osztályok melyikébe tartozik.
- (a) Input egy G irányítatlan gráf, Output „IGEN”, ha van G -ben 99 pontú klikk.
 - (b) Input egy G irányítatlan gráf, Output „IGEN”, ha G -ben van 5 pontú kör.
 - (c) Input egy G irányítatlan gráf, Output „IGEN”, ha G -ben van legalább $\sqrt{n}$ pontú kör.
 - (d) Input egy G irányítatlan gráf, Output „IGEN”, ha G élei pirosra és zöldre színezhetők úgy, hogy ne legyen egyszínű páratlan kör. (*)