# A számítástudomány alapjai 2018. I. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

## Tudnivalók

**Def:** Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa* $n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{ha } n > 0 \\ 1 & \text{ha } n = 0 \end{cases}$.

**Def:** Az „$n$ alatt a $k$” *binomiális együttható* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

**Def:** *$n$ elem $k$-adosztályú (ismétlés nélküli) variációja*: $n$ különböző elem közül $k$ db sorba rendezése, ismétlődés nincs. Számuk $V(n,k)$. **Állítás:** $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

**Def:** *$n$ elem $k$-adosztályú ismétléses variációja*: $n$ különböző elem közül $k$ db sorba rendezése, ismétlődés lehetséges. Számuk $V_{ism}(n,k)$. **Állítás:** $V_{ism}(n,k) = n^k$

**Def:** *$n$ elem permutációja*: $n$ különböző elem sorbarendezése, ismétlődés nincs.

**Állítás:** $n$ elem permutációinak száma $V(n,n) = n!$

**Def:** *$n$ elem $k$-adosztályú ismétléses permutációja*: adottak a $k_1, k_2, \ldots, k_l$ pozitív egészek, melyekre $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$. Az egyes elemfajtákból rendre $k_1, k_2, \ldots, k_l$ db van. Az ismétléses permutáció ezen elemek egy lehetséges sorbarendezése, az azonos fajtájú elemek nem megkülönböztethetők.

**Állítás:** $n$ elem ismétléses permutációinak száma $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_l!}$.

**Def:** *$n$ elem $k$-adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációja*: $n$ különböző elem közül $k$ db kiválasztása, ismétlődés nincs, sorrend nem számít. Számuk $C(n,k)$. **Állítás:** : $C(n,k) = \binom{n}{k}$

**Állítás:** (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ; (2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

**Def:** *$n$ elem $k$-adosztályú ismétléses kombinációja*: $k$ elem kiválasztása $n$ különböző fajtából, ismétlődés lehetséges, sorrend nem számít. Számuk $C_{ism}(n,k)$. **Állítás:** $C_{ism}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$

**Binomiális tétel:** $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0y^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$ .

**Köv.:** (1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$ ; (2) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots \pm \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$

## Gyakorlatok

1. A rendszámreform előtt a magyar rendszámok alakja BB-SS-SS volt (B=betű, S=számjegy). Hányféle rendszámot lehetett kiadni? Mennyit nyertünk az új (ú.n. svéd típusú) BBB-SSS rendszámok bevezetésével? A holland rendszámok hajdan $XX - YY - ZZ$ alakúak voltak, ahol $\{X, Y, Z\} = \{B, S\}$. Hány rendszámot lehetett ott kiadni?
2. Hány részhalmaza van egy $n$-elemű halmaznak? Hányféle $n$ hosszúságú 0/1 sorozat létezik? Mennyi az olyan 0/1 sorozatok száma, amelyek pontosan $k$ db 1-est tartalmaznak?
3. Ha $n$ focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?
4. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
5. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
6. Az 5-ös Bummjátékban hány Bumm hangzik el 1-től 1000-ig? Hány számra mondunk Bummo(ka)t? (Az 5-ös Bummjátékban egymás után mondják a játékosok a számokat 1-től indulva, azzal a megkötéssel, hogy ha a szám tízes számrendszerbeli alakjában van 5-ös, vagy a kimondandó szám 5-tel osztható, akkor nem szabad kimondani az adott számot, hanem helyette "Bumm"(ok)at kell mondani, mégpedig minden 5-ös számjegyért egyet, és az 5 prímfaktor kitevője számszor is Bummolni kell.)
7. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (Mik a válaszok futókra?(*))
8. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész $n$ számra $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$ teljesül.
9. Hány olyan 5-jegyű szám van, amiben szerepel a 3-as számjegy?
10. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?

11. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőknek tekintjük, de ugyanazon pálya két térfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.) (ZH '99)
12. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra? (ZH '01)
13. Egy moziban $n$ széksor van, az egyes sorokban $k_1, k_2, \ldots, k_n$ szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben $m$ embert? Hát egy $k$ székből álló sorba hányféleképp ülhet le $l$ házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
14. Hányféleképpen ültethetünk le $n^2$ embert $n$ db, egyenként $n$ üléses sorba úgy, hogy minden egyes sorban az ott ülők életkoruk szerint balról jobbra növekvő sorrendben foglaljanak helyet? (Tegyük fel, hogy mind az $n^2$ szereplő életkora különböző.) (ZH '98)
15. Hányféleképp lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak közvetlenül egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre? (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.) (ZH '15)
16. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban $3-3$ olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat? (ZH '11)
17. A $*****$-XXXXX focimeccs végeredménye 6 : 3 lett XXXXX csapatának javára. Hányféleképpen születhetett meg ez az eredmény, azaz hányféle lehetett az egyes gólok utáni állások sorrendje? (ZH '14)
18. Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk? (Az utcákat és avenueket sorban számozzák.)
19. Hányféleképpen lehet kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót az itt látható táblázatban, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | E | T | A | M | A | T | E | M | A | T | I | K | A |
| E | T | A | M | A | T | E | M | A | T | I | K | A | T |
| T | A | M | A | T | E | M | A | T | I | K | A | T | E |
| A | M | A | T | E | M | A | T | I | K | A | T | E | M |
| M | A | T | E | M | A | T | I | K | A | T | E | M | A |
| A | T | E | M | A | T | I | K | | T | E | M | A | T |
| T | E | M | A | T | I | K | A | T | E | M | A | T | I |
| E | M | A | T | I | K | A | T | E | M | A | T | I | K |
| M | A | T | I | K | A | T | E | M | A | T | I | K | A |

20. Hány különböző módon lehet a METAMATEMATIKA szó betűit egy kör mentén úgy elrendezni, hogy mind a 14 betűt pontosan egyszer fel használjuk fel? Két felírást akkor tekintünk azonosnak, ha egyik a másikból egy forgatással megkapható. (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)
21. Hányféleképpen lehet sorba rakni az $1, 2, \ldots, 10$ számokat úgy, hogy a sorozat valahányadik eleméig monoton növekedő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (A két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.) (ZH '14)
22. Egy adott $n \times k$ méretű csokoládéból hányféleképpen lehet kisebb csokoládét készíteni? (A csokoládét csak perforáció mentén törhetjük, és pl. nem olvaszthatjuk be.)
23. Hány részre osztja $n$ általános helyzetű, azonos síkban fekvő egyenes a síkot? (A sík egyenesei akkor általános helyzetűek, ha nincs köztük két párhuzamos és semelyik három egyenesnek sincs közös pontja.) A keletkező síkrészek közül hány lesz korlátos?
24. Hat általános helyzetű egyenes alkotta 15 metszéspontból hányféleképpen lehet kiválasztani 6-ot úgy, hogy egyetlen egyesről se válasszunk kettőnél több metszéspontot?(*)
25. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Hány lakatot kell „venniük" a vasboltban, hogy ezt megtehessék? Hány lakat kell akkor, ha azt akarják, hogy a banditavezér bármely más rablóval kinyithassa a ládát (de egyedül ne), amúgy pedig a fenti szabály érvényesüljön?(*)
26. A HK 18 vezetőjéből hányféleképpen lehet a gólyatábor 9 fős szervezőbizottságát úgy megválasztani, hogy a 7 büntetett előéletű tagból legfeljebb 3 kaphat helyet a testületben?(*)