

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2017. 11. 30.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésén az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

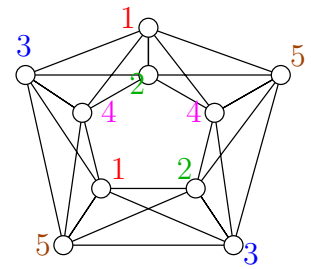
1. Mennyi a kromatikus száma a felső ábrán látható gráfnak?

A kromatikus számról tanultak alapján $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 4$, hisz G -ben van 4 méretű klikk. (3 pont)

Ha azonban G -t 4 színnel próbáljuk kiszínezni, akkor a sugárirányú élek csúcsait felváltva ugyanazzal színpárral színezzük, így 4 színnel nem lehetséges a színezés. Ezért $\chi(G) \geq 5$. (3 pont)

Az ábrán látható G csúcsainak egy 5 színnel történő színezése, ennek alapján tehát G 5-színezhető, így $\chi(G) \leq 5$ (3 pont)

A két eredmény összevetéséből $\chi(G) = 5$ adódik. (1 pont)



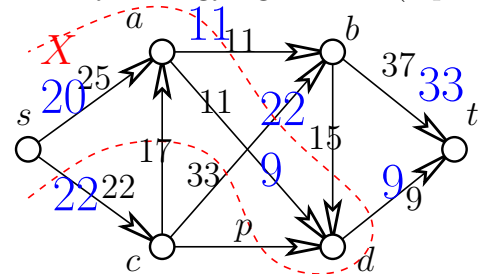
2. Mennyi $p = 0$ esetén az alsó ábrán látható hálózatban a maximális nagyságú st -folyam nagysága? Ha $p > 0$, akkor hogyan függ a maximális nagyságú st -folyam nagysága p -tól?

Maximális nagyságú folyamat keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével úgy, hogy $p = 0$ -val dolgozunk. Az aktuális segédgráf néhány st -útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamat kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (4 pont)

A folyamat egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (9), $sdeft$ (5), $saect$ (6) $sdbft$ (8), $saedbft$ (5), $saecbft$ (9) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s -ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st -vágás szintén 42 kapacitású, p -tól függetlenül. (4 pont)

Mivel a hálózatban $p = 0$ -ra létezik 42 nagyságú folyam és tetszőleges p esetén létezik 42 kapacitású st -vágás, ezért a maximális folyam nagyság a p paraméter értékétől függetlenül mindig 42. (2 pont)



(A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 42 nagyságú st -folyamot ill. ugyanekkora kapacitású st -vágást. Ha azonban valamelyik ezek közül hibás, akkor nincs megindokolva az optimalitás. Ha szerepel a folyam algoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont egyértelműen jár részpontszám.)

3. Legyenek a G páros gráf színosztályai $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ill. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, élei pedig $a1, a2, a3, b2, b4, c2, c3, c5, d2, d4, e2, e4, f4, f5, f6$. Teljesül-e az A színosztályra a Hall-feltétel?

Ha $X = \{b, d, e\}$, akkor $N(X) = \{2, 4\}$, (6 pont)

tehát $|X| > |N(X)|$ teljesül az A színosztály X részhalmazára. (3 pont)

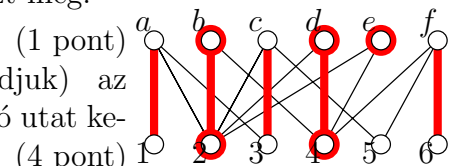
Ezért az A színosztály nem teljesül a Hall-feltétel. (1 pont)

Természetesen nem szükséges megindokolni, hogyan találta a hallgató a Hall-feltételt sértő X halmazt. Ettől még jár részpontszám azért, ha az órán tanult módon keresi ezt meg.

Az ábrán látható a G gráf egy diagramja. (1 pont)

Az alternáló utas algoritmussal dolgozunk. Kiindulunk (mondjuk) az $a1, b2, c3, d4, f6$ párosításból és fedetlen csúcsokban végződő alternáló utat keresünk. (4 pont)

Az e csúcsból alternáló úton elérhető csúcsokat az ábrán megjelöltük. (2 pont)



- Mivel az 5 csúcs nem érhető el alternáló úton, a kiindulási párosítás maximális, (0 pont)
és az A színsztályban elérhető csúcsok X halmaza megsérti a Hall-feltételt. (3 pont)
4. Legfeljebb hány tartománya lehet egy 20-csúcsú, síkbarajzolt G gráfnak, ha G minden tartományát legalább 5 él határolja?
- G -re érvényes az Euler-féle poliéderformula órán tanult általánosítása, azaz $n + t = e + k + 1$, ahol $n = 20$ a csúcsok, t a tartományok, e az élek, k pedig a G -beli komponensek számát jelöli. (2 pont)
Azt is tudjuk, hogy $2e = \sum \ell_i$, ahol ℓ_i az i -dik lapot határoló élek száma. (2 pont)
Mivel minden lapot legalább 5 él határol, ezért $2e = \sum \ell_i \geq 5t$ teljesül. (2 pont)
Innen $2n + 2t = 2e + 2 + 2k \geq 5t + 2 + 2k$ miatt $3t \leq 2n - 2 - 2k \leq 2n - 4 = 36$, azaz $t \leq 12$ adódik. (2 pont)
- Ráadásul ez a lapszám elérhető: pl a dodekaéder élgráfjának szokásos síkbarajzolásának 20 csúcsa és 12 lapja van, miközben minden lapot pontosan 5 él határol. A válasz tehát az, hogy 12 a tartományok maximális száma a feladatban kikötött feltételek mellett. (2 pont)
5. A Mikulás szaloncukrot porcióz a BME 368 elsőéves villamosmérnök-hallgatójának. Azoknak, akik meg tudták oldani a ZH-n a róla szóló feladatot, fejenként 17, a többieknek pedig fejenként 10 cukor jár. A Mikulás a szaloncukrot 500 darabos csomagokban tárolja, és ezekből csak annyit bont fel, amennyit feltétlenül szükséges. A munka végeztével kimaradó 5 szaloncukrot a krampuszok felhabzolták. Hányan oldották meg a szóban forgó ZH példát?
- Legyen x a példát megoldó villamosmérnök-hallgatók száma. Ekkor a kiosztott szaloncukrok száma $17x + 10(368 - x) = 7x + 3680$. (1 pont)
A kimaradó 5 cukorral együtt 500-zal osztható számú szaloncukorról van szó, így a $7x + 3685 \equiv 0(500)$ lineáris kongruencia adódik. (2 pont)
Ezt átírva kapjuk, hogy $7x \equiv 315(500)$, amit szerencsésen el tudunk osztani 7-tel az órán tanult módon: $x \equiv 45(500)$. (5 pont)
Tekintettel arra, hogy $0 \leq x \leq 368$, egyedül az $x = 45$ lehet a megoldás. (2 pont)
- Természetesen más utat is követhetünk.
- Legyen y a felbontott szaloncukorcsomagok száma. Mivel mindenki kapott legalább 10 szaloncukrot, ezért bizonyosan szükség volt 3680 cukorra. Ezen túl annyiszor 7 cukrot kell kiosztani, ahányan megoldották a szóban forgó feladatot, és még marad 5 cukor. Ezért $500y - 3685$ -nak 7-tel oszthatónak kell lennie. (2 pont)
Innen adódik az $500y \equiv 3685(7)$ kongruencia, (1 pont)
amit átírhatunk $3y \equiv 3(7)$ alakba. (1 pont)
Osztás után $y \equiv 1(7)$ adódik. (1 pont)
- A felbontott csomagok számára $10 \cdot 368 \leq 500y \leq 17 \cdot 368$ teljesül, ahonnan $7 < \frac{3680}{500}y \leq \frac{17 \cdot 368}{500} < \frac{20 \cdot 400}{500} = 16$ adódik. (3 pont)
- Az egyetlen szóba jövő megoldás az $y = 8$. Ha tehát x hallgató kapott 17 cukrot, akkor $17x + 10(3680 - x) = 8 \cdot 500 = 4000$, és innen kapjuk az $x = 45$ megoldást. (2 pont)
- ★ Tegyük fel, hogy az 500 csúcsú, egyszerű G gráfnak 450 olyan csúcsa van, amelyek egyikének a fokszáma sem több 49-nél. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 50$ teljesül.
- Azt kell megmutatnunk, hogy 50 szín elegendő G csúcsainak kiszínezéséhez. (1 pont)
Az órán tanult mohó színezést végezzük el, mégpedig úgy, hogy a 450 db legfeljebb 49-fokú csúcsot megelőzze a maradék 50 csúcs színezése. (4 pont)
Ekkor a elsőként színezett 50 gráfcsúcsához bizonyosan nem használunk 50-nél több színt. (2 pont)
Az ezt követő 450 csúcs mindegyikének legfeljebb 49 szomszédja lett korábban kiszínezve, ezért legfeljebb 49-féle szín van kizárva a konkrét csúcs kiszínezésekor. (2 pont)
Ezek szerint a mohó színezés során sosem kényszerülünk egy 51-dik színt használni, más szóval a mohó színezés segítségével G csúcsainak kiszínezéséhez legfeljebb 50 színt használunk. Mi pedig pontosan ezt akartuk bizonyítani. (1 pont)