A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2017. 10. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az osztályba járó 15 fiú és 15 lány közül hányféleképp választható olyan 10 fős küldöttség, amelyikben legalább két lány és legalább két fiú van?
(A végeredményt nem szükséges kiszámolni, elég egy zárt alakot megadni.)

   Az 30 tanulója közül pontosan $\binom{30}{10}$-féleképp válaszható ki egy 10-tagú küldöttség. (3 pont)
   Ezek között azonban lesznek olyanok is, amelyek nem teljesírik a feladatbeli elvárást, (1 pont)
   konkrétan azok, amelyek 0 vagy 1 fiút, ill. azok, amelyek 0 vagy 1 lányt tartalmaznak. (1 pont)
   A 0 fiút ill. 0 lányt tartalmazó 10-esek száma egyaránt $\binom{15}{10}$, (1 pont)
   az 1 fiút ill. az 1 lányt tartalmazó 10-esek száma pedig $\binom{15}{1} \cdot \binom{15}{9}$ (2 pont)
   A válasz tehát $\binom{30}{10} - 2 \cdot \binom{15}{10} - 2 \cdot \binom{15}{1} \cdot \binom{15}{9}$. (2 pont)
   Helyes indoklással elfogadható az a válasz is, ha összeszámoljuk, $2 \le i \le 8$ esetén az i fiút és $10 - i$ lányt tartalmazó küldöttségeket: $\sum_{i=2}^{8} \binom{15}{i} \cdot \binom{15}{10-i}$, hiszen mivel 7 tagot adunk össze, ez zárt alaknak tekinthető.

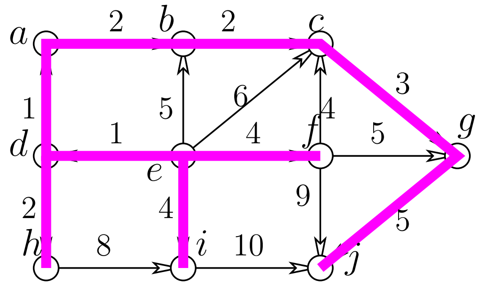
2. A G gráfról tudjuk, hogy egyszerű, 10 csúcsa van, és ebből 9 csúcs fokszáma pontosan 5. Igazoljuk, hogy G összefüggő.

   Azt kell igazolni, hogy G bármely két csúcsa között van út G-ben. (1 pont)
   Mivel összesen 10 csúcs van, ha két 5-ödfokú csúcs nem szomszédos, akkor kell lennie a 8 maradék csúcs között kell lennie (legalább 2) közös szomszédjuknak. (4 pont)
   A 10-dik csúcs biztosan nem izolált pont, hiszen ekkor G csúcsainak fokszámösszege (azaz az élek számának kétszerese) páratlan volna. (3 pont)
   Tehát e 10-dik csúcsnak van 5-ödfokú szomszédja, ezért ebbe a szomszédba, és minden más csúcsba is vezet ebből a csúcsból út. (2 pont)
   Azt kaptuk, hogy bármely két csúcs között vezet út G-ben, tehát G csakugyan összefüggő. (1 pont)
   Érvelhetünk másképp is.
   Azt kell igazolnunk, hogy G-nek csak egy komponense van. (2 pont)
   Minden 5-ödfokú csúcs olyan komponensben található, amelyben a szomszédai is benne vannak, tehát minden 5-ödfokú csúcsot egy-egy, legalább 6-pontú komponens tartalmazza. (2 pont)
   Tekintettel arra, hogy egy 10-csúcsú gráfnak nem lehet két különböző, legalább 6 csúcsot tartalmazó komponense, ezért minden 5-ödfokú csúcs ugyanahhoz a komponenshez tartozik. (2 pont)
   Ahogy fent is láttuk, a 10-dik csúcs nem lehet 0-adfokú (azaz izolált pont). (3 pont)
   Így a 10-dik csúcs is 5-ödfokú csúcsokkal közös komonensben van, G csakugyan összefüggő. (1 pont)

3. Az ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él költségét jelentik, az élek irányításától tekintsünk el. Legyen G' az a gráf, ami G-ből keletkezik az ej él behúzásával. Legfeljebb mennyinek választható az ej él költsége ahhoz, hogy legyen G'-nek olyan minimális költségű feszítőfája, ami tartalmazza az ej élt?

   Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével, az egyes élek megépítéséről növekvő költség szerinti sorrednben döntve meghatározzuk a G minimális költségű feszítőfáját. (3 pont)
   Az ábrán a megvastagított élek mutatnak egy ilyen módon konstruált F feszítőfát. (3 pont)
   Az F ej útján gj költsége 5, ezért ha az ej nem drágább 5-nél, akkor $F - gj + ej$ egy F-nél nem drágább feszítőfa, tehát ej lesz olyan minimális költségű feszítőfa, ami ej élt tartalmazza. (2 pont)

Ha azonban ej drágább 5-nél, és lenne olyan minimális költségű F^* feszítőfa, ami ej-t tartalmazza, akkor a most megtalált F feszítőfa ej útjának valamelyik uv éle az $F^* - ej$ két komponense között futna. Mivel az uv él költsége legfeljebb 5, ezért $F^* - ej + uv$ egy F^*-nál olcsóbb feszítőfa lenne, ami ellentmondás. (1 pont)
A válasz tehát 5. (1 pont)

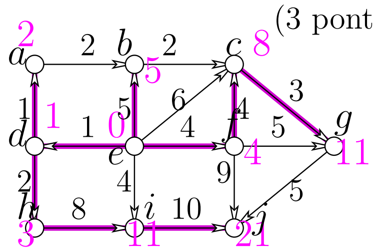


4. Legfeljebb hány keresztél keletkezik az ábrán látható G gráf irányítatlan változatának e gyökérből indított BFS bejárása után?

Az órán azt tanították, hogy a BFS után a gráfban nincs szintet ugró él, így előreél sincs. (2 pont)
Mivel irányítatlan gráf esetén az előreél és a visszaél ugyanazt azélt jelenti, (1 pont)
a BFS után csak faélek ill. keresztélek lesznek. (1 pont)
A G gráf összefüggő,ezért a faélek feszítőfát alkotnak,tehát pontosan 9 faél lesz. (1+1+1 pont)
A G gráfnak pontosan 16 éle van, (1 pont)
ezért a keresztélek száma minden BFS bejárás után pontosan $16 - 9 = 7$ lesz, (1 pont)
ez tehát a kérdezett maximum is. (1 pont)
Aki figyelmetlenül olvas, és irányított gráffal dolgozik, attól ezért ne vonjunk le pontot, de várjuk el, hogy (1-1 pontért) rámutasson, hogy G aciklikus, ezért nem lesz visszaél, valamint e-ből minden csúcs elérhető, ezért a faélek egy megirányított feszítőfát alkotnak.
Aki pusztán egy BFS-t hajt végre, és megszámolja a keresztéleket, az 5 pontot kap, hiszen nem bizonyítja, hogy a kapott érték egyúttal a maximum is.

5. Az ábrán látható G gráf egyes éleire írt számok azt jelentik, hogy hány kincset tudunk összegyűjteni az adott élen. Határozzuk meg, mennyi az összesen összegyűjthető kincsek száma, ha a gráf tetszőleges pontjából indulhatunk, de csak irányított élek mentén haladhatunk.

A G gráf aciklikus, ami pl. az $e, d, a, b, h, i, f, c, g, j$ topologikus sorrendből látszik. (2 pont)
Ezért a kincsvadászat során bizonyosan G egy utját járjuk be, tehát nekünk a G leghosszabb útját kell meghatároznunk, ahol az élekre írt számokat az adott él hosszának értelmezzük. (1 pont)
Erre az órán tanult PERT módszert alkalmazva a fenti topologikus sorrendben meghatározzuk minden v csúcsra, hogy mennyi a v-be vezető leghosszabb út hossza. (3 pont)



Az ábrán az egyes csúcsokra írt számok a fenti módon kiszámított értékeket adják meg, a megvastagított élek az ezen értékeket meghatározó éleket jelölik. (3 pont)
Az összegyűjthető kincsek maximális száma tehát 21, (1 pont)
és ehhez az $edhij$ utat kell bejárnunk. (0 pont)

Nem muszáj leghosszabb utakra hivatkozni, lehet közvetlenül indokolni azt is, hogy a megfelelő PERT problémában a legkorábbi kezdési idők adják a kérdéses számokat. Aki rámutat a leghosszabb út problémára, megemlíti, hogy ez az élhosszok előjelcseréjével legrövidebb út problémára vezet, majd a konzervatív élsúlyozásra hivatkozva a Ford vagy Floyd valamelyikének alkalmazását javasolja, az 7 pontot kap, ha nem alkalmazza magát az algoritmust.

$\boxed{\star}$ Legyenek a G gráf csúcsai azok az (a_1, a_2, a_3) sorozatok, ahol $a_i \in \{0, 1, 2\}$ teljesül minden $1 \leq i \leq 3$ esetén. Két csúcs pedig pontosan akkor szomszédos, ha a csúcsoknak megfelelő két sorozat pontosan két helyen tér el egymástól. Van-e Hamilton-köre a $\overline{G}$ komplementergráfnak?

A G gráf csúcsainak száma a 3-hosszúságú 1/2/3-sorozatok száma, ami $3^3 = 27$. (2 pont)
Bármely G-beli csúcs fokszáma annyi, ahányféleképp kiválaszthatunk két helyet a sorozatban, és az ottani számokat megváltoztathatjuk. (1 pont)
A fokszám tehát $\binom{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$. (2 pont)
A $\overline{G}$ komplementergráfban tehát a csúcsok fokszáma pontosan $27 - 1 - 12 = 14$. (1 pont)
Az órán tanult Dirac-tétel szerint ha egy egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma legalább a csúcsok számának a fele, akkor a gráfban van Hamilton-kör. (3 pont)
Mivel $14 \geq \frac{27}{2}$, ezért a konkrét G gráfra teljesül a fenti Dirac-feltétel, így a Dirac-tétel miatt $\overline{G}$-nek van Hamilton-köre. (1 pont)