A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2017. 12. 11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképp tölthető ki egy ötöslottószelvény úgy, hogy a lehetséges 90 számból legalább egy 10-zel oszthatóra is tippeljünk?

   Az ötöslottószelvény összes lehetséges kitöltéseinek száma $\binom{90}{5}$. (3 pont)
   Ezekből a rossz kitöltések azok, amelyekben nem tippeltünk 10-zel osztható számra, azaz a a maradék 81 számból tippeltünk ötöt. (3 pont)
   Az ilyen rossz kitöltések száma tehát $\binom{81}{5}$. (2 pont)
   A válasz a feladatra e két mennyiség különbsége, azaz $\binom{90}{5} - \binom{81}{5}$. (2 pont)

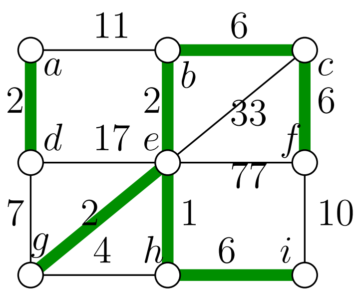
2. Tegyük fel, hogy az F fának pontosan 333 levele van. Igazoljuk, hogy F-nek van olyan levéltől különböző v csúcsa, aminek a fokszámára $d(v) \neq 5$ teljesül.

   Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy F minden levéltől különböző csúcsa ötödfokú. Legyen n az F csúcsainak száma. A tanultak szerint $|E(F)| = n - 1$. (2 pont)
   A handshake lemma miatt $2(n-1) = 2|E(F)| = \sum_{v \in V(F)} d(v) = 333 \cdot 1 + (n - 333) \cdot 5$ (4 pont)
   Rendezés után $3n = 4 \cdot 333 - 2$ adódik, ebből pedig $443 < n < 444$ következik. (2 pont)
   Vagyis n nem egész, ám ez ellentmond a feltevésünknek. Azt kaptuk tehát, hogy a feladatban megfogalmazott állítás igaz: F-nek csakugyan van olyan csúcsa, aminek a fokszáma nem 5 és nem 1. (2 pont)

3. A felső ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él megépítésének költségét jelentik. Mennyi a lehető legkisebb költség, amivel elérhetjük, hogy megépüljön G egy feszítőfája, ha az egyik alvállalkozónkkal korábbi tartozásai okán ingyen meg tudunk építtetni egy általunk kiválasztott, tetszőleges élt?

   A G egy feszítőfáját fogjuk megépíteni, amelynek nyilván a legdrágább élét építtetjük meg a lekötelezett alvállalkozóval. Mivel a feszítőfának pontosan 8 éle lesz, nekünk az a feladatunk, hogy úgy építsünk meg 7 élt, hogy azok erdőt alkossanak és az összköltségük a lehető legkisebb legyen. Ennek az erdőnek két komponense lesz, és mindegyik komponens egy-egy minimális költségű feszítőfa lesz a saját ponthalmazán. Ezért e két feszítőfa megépíthető a Kruskal-algoritmus segítségével. Ez a hét él tehát megkapható úgy, hogy ha a szokásos Kruskal-algoritmust futtatjuk mindaddig, amíg meg nem építünk 7 élt. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy mégiscsak végigfuttatjuk a Kruskal-algoritmust a feladatban szereplő gráfon, nekünk pedig az outputként kapott minimális költségű feszítőfa éleit kell megépíteni, a legdrágább él kivételével. (2 pont)

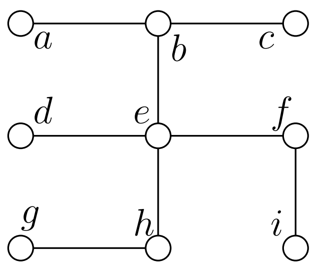
   Az ábrán látható az órán tanult Kruskal algoritmus által megépített első 7 él. Ezt úgy kaptuk, hogy növekvő költség sorrendjében döntöttük el az élekről, hogy megépítjük-e, és egy élt akkor építettünk meg, ha nem hozott létre kört korábban megépített élekkel. (6 pont)

   Ezen élek összköltsége 25, tehát ennyi a válasz a feladat kérdésére is. (2 pont)
   Az alvállalkozónkkal pedig tárgyalást kezdünk arról, hogy milyen szolgáltatást nyújt nekünk, ha a de helyett „csak” a dg élt kell megépítenie. (0 pont)

4. Legfeljebb hány éle lehet annak az irányítatlan G gráfnak, amelynek egyszerre e és f gyökerű DFS fája az alsó ábrán látható gráf?

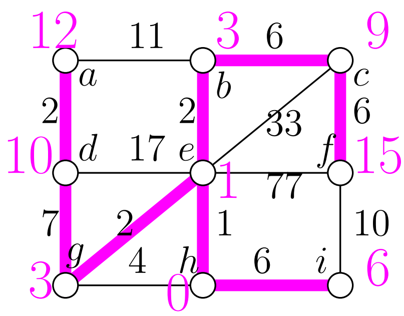
Az órán azt tanították, hogy a DFS bejárás után irányítatlan gráfban nincs keresztél. (3 pont)



Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G-nek a megadott feszítőfán kívüli élei olyanok, hogy azok végpontjai egymás leszármazottai, bármelyik gyökérből is nézzük. (1 pont)
Ezt a tulajdonságot csak az e gyökérből csak az ea, ec, eg és ei élek teljesítik, azonban e négy él közül ei keresztél az f gyökérből nézve. (4 pont)
Könnyen látható, hogy megadott fa egyszerre e és f gyökerű DFS-fája is annak a gráfnak, ami a fából az ea, ec és eg élek hozzávételével keletkezik. (1 pont)

Tehát a válasz a feladat kérdésére $8+3 = 11$, hiszen a fának 8 éle van, és e-ből még további 3 húzható be. (1 pont)

5. Határozzuk meg, hogy a felső ábrán látható G gráfnak melyik az a két csúcsa, amelyeknek a h-tól mért távolsága pontosan 1-gyel tér el egymástól. Az élekre írt számok most az adott él hosszát jelentik.



Tekintettel arra, hogy minden élhossz nemnegatív, és minket a h-ból mért távolságok érdekelnek, az órán tanult Dijkstra-algoritmus alkalmazásával meghatározzuk G csúcsainak a h-tól mért távolságát. (2 pont)
Az algoritmust lefuttatva a csúcsok $h, e, g, b, i, c, d, a, f$ sorrendben kerülnek a KÉSZ halmazba, a legrövidebb utak fája és az egyes csúcsok h-tól mért távolsága az ábrán látható. (6 pont)
A feladat kérdésére tehát a válasz az, hogy a c és d csúcsok h-tól mért távolsága különbözik pontosan 1-gyel. (2 pont)

$\boxed{\star}$ A G egyszerű gráfnak 33 piros, 777 fehér, 333 zöld, valamint 77 sárga csúcsa van. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok különböző színűek. Behúzható-e G-be néhány további él úgy, hogy olyan egyszerű gráfot kapjunk, aminek van Euler-sétája?

A G gráfban minden csúcs foka páratlan, (1 pont)
márpedig az Euler-séta meglétéhez az szükséges, hogy legfeljebb két páratlan fokú csúcs legyen a gráfban. (1 pont)
Ezért nekünk úgy kell további éleket behúznunk, hogy legfeljebb két kivételtől eltekintve minden csúcsból páratlan számú újonnan behúzott él induljon. (2 pont)
Az új élek behúzásával kapott gráfnak egyszerűnek kell maradnia, ezért csakis azonos színű csúcsok közé húzhatunk be új élt. (1 pont)
A handshake lemma miatt a 33 piros pont között behúzott élek alkotta gráfnak nem lehet minden pontja páratlan fokú, ezért lesz olyan piros pont, amiből páros sok új él indul. Hasonlóan lesz ilyen csúcs a fehér, a zöld és a sárga csúcsok között is. Ezen csúcsok fokszáma pedig a kiegészített gráfban páratlan lesz. (4 pont)
Azt kaptuk, hogy bárhogyan is próbálkozunk legalább 4 páratlan fokú csúcs marad, így nem érhető el a feladatban leírt tulajdonság. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2017. 12. 11.)

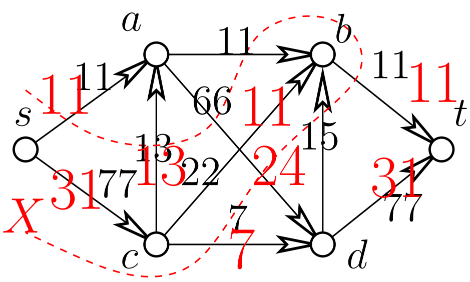
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?

   Tegyük fel, hogy a G gráf legfeljebb 100 élű, és a lehető legkevesebb színnel van kiszínezve. Ekkor bármely két színosztály között kell élnek vezetnie, ugyanis ha két színosztály csúcsai között nem vezetne él, akkor e két színosztály csúcsait közös színnel színezve a kromatikus számánál eggyel kevesebb színnel tudnánk G-t kiszínezni, ami lehetetlen. (3 pont)
   Ez azt jelenti, hogy ha k színosztály van a színezésben, akkor $100 \geq \binom{k}{2}$ (3 pont)
   Mivel $\binom{15}{2} = 15 \cdot 7 = 105 > 100$, ezért a kromatikus szám 15-nél bizonyosan kisebb. (2 pont)
   A 14 viszont elérhető, pl K_{14} megfelel. (1 pont)
   A feladat kérdésére tehát 14 a válasz. (1 pont)

2. Mennyivel növekszik meg a maximális nagyságú st-folyam nagysága akkor, ha a jobb oldali hálózatban az ab él kapacitását 22-re növeljük?

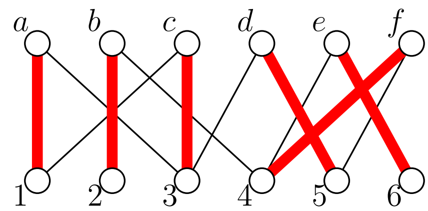
   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével a megadott hálózatban. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (pirossal) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy e élen nincs ilyen szám, akkor $f(e) = 0$.) (4 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az *sabt* (11), *scdt* (7), *scadt* (13), *scbadt* (11) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

   Az f folyamhoz tartozó segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású, az ab él kapacitásától függetlenül. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 nagyságú folyam és ugyanekkora kapacitású st-vágás, ennél nagyobb st-folyam akkor sem található, ha az ab él kapacitását megnöveljük. Ezért a maximális folyamnagyság nem változik akkor, ha az ab él kapacitása 22-re nő. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált 42 nagyságú st-folyamot ill. ugyanekkora kapacitású st-vágást. Ha azonban valamelyik ezek közül hibás, akkor nincs megindokolva az optimalitás. Ha szerepel a folyamalgoritmus, de valamit elszámol a hallgató, akkor viszont egyértelműen jár részpontszám.)

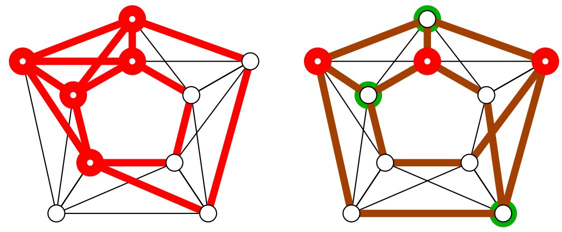
3. A G páros gráf színosztályai $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ill. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, élei pedig $a1$, $a3$, $b2$, $b4$, $c1$, $c3$, $d3$, $d5$, $e4$, $e6$, $f4$, $f5$. Teljesül-e A-ra a Hall-feltétel?

   A Hall-tétel szerint pontosan akkor teljesül a Hall-feltétel, ha G-nek van az A színosztályt fedő párosítása. (3 pont)
   Az $a1, b2, c3, d5, f6, e4$ élek teljes párosítást alkotnak. (6 pont)
   A teljes párosítás fedi az A színosztályt, tehát az A színosztályra teljesül a Hall-feltétel. (1 pont)

   Nem szükséges megindokolni, hogyan találta a hallgató a teljes párosítást. Természetesen ha az órán tanult módon keres ilyet, azért részpontszám jár, még ha nem is fejezi be a megoldást. A G gráf helyes lerajzolása 1 pontot ér.

4. Síkbarajzolható-e a jobb oldalon látható gráf?



Kuratowski tétele szerint egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmazza részgráfként sem a K_5, sem a $K_{3,3}$ egy felosztását. (2 pont)
A bal oldali ábra mutatja, hogy a megadott gráf részgráfként tartalmazza a K_5 egy felosztását, (7 pont)
ezért a kérdezett gráf nem síkbarajzolható. (1 pont)
A második ábrán egy topologikus $K_{3,3}$ részgráf látható.

Avagy:

Az órán azt tanították, hogy ha egy egyszerű síkbarajzolható gráf csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor élszámára $e \leq 3n - 6$ teljesül. (4 pont)
Jelen esetben a gráfnak $n = 10$ csúcsa és $e = 25$ éle van (1 pont)
márpedig ha síkbarajzolható lenne, akkor legfeljebb $3 \cdot 10 - 6 = 24$ éle lehetne. (4 pont)
Tehát az ábrán látható gráf nem síkbarajzolható. (1 pont)

Ha valaki a négyszíntételre hivatkozik, akkor az önmagában 3 pontot ér. Ha közli, hogy a ZH-ban szerepelt, hogy ez a gráf nem színezhető 4 színnel, akkor az újabb 3 pont. Ha pedig ennek a ténynek a bizonyítását is leírja, azért jár a fennmaradó 4 pont.

5. Oldjuk meg a $21x \equiv 35(68)$ kongruenciát.

Mivel $(68, 21) = 1$, ezért pontosan egy megoldás lesz modulo 68. (1 pont)
Ekvivalens átalakításokkal dolgozunk, először a 68-hoz relatív prím 3-mal szorzunk: $63x \equiv 105(68)$, amit $-5x \equiv 37$ alakba írhatunk át. A 13-mal szorzás ismét ekvivalens átalakítás, így $-65x \equiv 481(68)$ adódik, amit $3x \equiv 5(68)$ alakba írhatunk. Furfangosan ezt $3x \equiv -63(68)$ alakba írva oszthatunk 3-mal: $x \equiv -21(68)$, (8 pont)
azaz $x \equiv 47(68)$ a megoldás. (1 pont)

Működik persze az univerzális módszer is.

$21x \equiv 35(68)$ és $68x \equiv 0(68)$ $\iff$ $5x \equiv -105(68)$ és $21x \equiv 35(68)$ $\iff$ $5x \equiv 31(68)$ és $21x \equiv 35(68)$ $\iff$ $x \equiv 35 - 4 \cdot 31(68)$ és $5x \equiv 31(68)$ $\iff$ $x \equiv -21(68)$ és $5x \equiv 31(68)$ $\iff$ $x \equiv -21(68)$ és $0x \equiv 31 + 5 \cdot 21 = 136 \equiv 0(68)$. (9 pont)
A megoldás tehát az $x \equiv -21 \equiv 47(68)$ (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény a $G = (V, E)$ irányított gráf élein, valamint s, x és t a G csúcsai. Lehet-e 222 a maximális nagyságú sx-folyam nagysága, ha tudjuk, hogy a maximális nagyságú st-folyam nagysága 111 és a maximális nagyságú xt-folyam nagysága pedig 333?

Mivel a maximális nagyságú st-folyam nagysága 111, ezért létezik olyan X halmaz, amely 111 nagyságú st-vágást indukál. (3 pont)
Nyilván $s \in X$ és $t \notin X$. Ha most $x \in X$, akkor X egyúttal 111 kapacitású xt-vágást is meghatároz, ami lehetetlen, hiszen a feladat szövege szerint létezik 333 nagyságú (tehát 111-nél nagyobb) xt-folyam. (3 pont)
Ezek szerint $x \notin X$. Ám ekkor X egy 111 nagyságú sx-vágást indukál. (3 pont)
Ez pedig azt jelenti, hogy nem létezhet 111-nél nagyobb sx-folyam, így 222 nagyságú sem. (1 pont)