A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

9. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A G gráf *síkbarajzolható*, ha létezik G-nek olyan diagramja, amiben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. Az ilyen tulajdonságú diagramot *síkbarajzolt gráfnak* hívjuk. A síkbarajzolt gráf a síkot *tartományokra (lapokra)* osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartomány nincs.

Tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Köv.: Tetszőleges konvex poliéder élhálója síkbarajzolható.

Hasznos összefüggés Ha egy G síkbarajzolt gráfnak e éle van, és az egyes tartományait $l_1, l_2, \ldots$ él határolja, akkor $2e = \sum_i l_i$. (Ha egy uv él mindkét oldalán ugyanaz a t_i tartomány fekszik, akkor uv-t kétszer számoljuk l_i-be.)

Tétel: Ha G sr, n csúcsa, e éle, k komponense és t tartománya van, akkor $n + t = e + k + 1$.

Köv.: Ha G sr, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.

(**Euler-formula**) Ha egy öf sr gráfnak n pontja, e éle és t tartománya van, akkor $n + t = e + 2$.

Köv.: Ha G egyszerű, legalább 3-pontú, sr gráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G-nek háromszöglapja sincs, akkor még $e \leq 2n - 4$ is igaz.

Köv.: Ha G sr és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

Köv.: Sem K_5, sem $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Def: A G és H gráfok *topologikusan izomorfak*, ha H megkapható G-ből az alábbi lépésekkel:
(1) Törlünk egy uv élt, és beveszünk egy új csúcsot, u és v szomszédokkal.
(2) Törlünk egy másodfokú x csúcsot, és éllel összekötjük x két szomszédját.
Ha csak az (1) operációt alkalmazzuk G-re (tetsz. sokszor), akkor G egy *soros bővítését* kapjuk.

Kuratowski tétel: A G gráf pontosan akkor sr, ha nem tartalmaz sem $K_{3,3}$-mal, sem K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot.

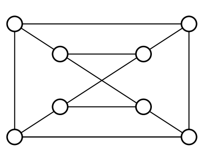
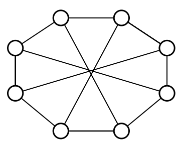
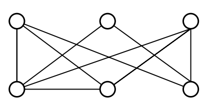
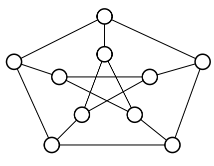
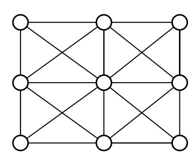
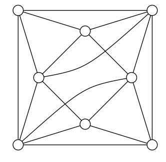
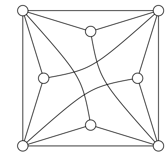
Def: Legyen $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf, *duálisa* az a $G^* = (V^*, E^*)$ gráf, amelyre V^* a G lapjainak halmaza ill. $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e-t határoló tartomány(ok)nak megfelelő duális csúcsokat összekötő él.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz *vágás*, ha Q egy olyan élhalmaz, hogy egyrészt Q elhagyásakor G szétesik (azaz komponenseinek száma megnő), másrészt Q egy legszűkebb élhalmaz ezzel a tulajdonsággal, azaz Q semelyik valódi részhalmazának elhagyásától sem esik G szét. Az e él *elvágó él*, ha $\{e\}$ vágás. A G gráf e és e' élei *soros élek*, ha $\{e, e'\}$ vágás.

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ sr, G^* pedig a G duálisa n^*, e^*, t^*, k^* paraméterekkel. Ekkor
(1) G^* sr, $n^* = t$, $k^* = 1$, azaz G^* öf.
(2) $C \subseteq E(G)$ a G köre (vágása) $\iff$ $f(C)$ G^* vágása (köre).
(3) $e \in E(G)$ a G hurokéle (elvágó éle) $\iff$ $f(e)$ a G^* elvágó éle (hurokéle).
(4) $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff$ $f(e), f(e')$ soros (párhuzamos) élek.

Gyakorlatok

1. Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?
2. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
3. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
4. Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7, v_8$ a G gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$-nek és $j^2 - 1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, síkbarajzolható-e G. (ppZH '12)
5. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok? Hát az alábbiak?

6. Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a $\overline{G}$ komplementere nem síkbarajzolható?(V '01)
7. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G-nek?
8. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot, melynek pontjai a gyanús cégeknek felelnek meg és G két csúcsa között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G-t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket? (ZH '14)
9. Van-e olyan síkbarajzolt gráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?
10. Igaz-e, hogy ha G síkbarajzolt gráf és G^* a G duálisa, akkor G egyúttal a G^* duálisa?
11. Igazoljuk, hogy ha a G síkbarajzolható gráf G^* duálisa izomorf G-vel, akkor $e = 2n-2$ teljesül.
12. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
13. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak!
14. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.
15. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. Mutassuk meg, hogy K_{10} lerajzolásakor legalább 42 élmetszéspontot kapunk.
16. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
17. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és $\overline{G}$ közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
18. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
19. Legfeljebb hány éle és hány tartománya lehet egy olyan egyszerű, n pontú, sr G gráfnak, aminek van olyan lapja, ami G minden csúcsát tartalmazza a határán?
20. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú. (pZH '14)
21. Mutassuk meg, hogy a K_5, K_6, K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G-be behúzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
22. Ha G $n \geq 3$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
    (a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
    (b) ha G-nek $3n-6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
    (c) G-nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja. (ZH '01)
23. Adott $n > 2$ egész szám esetén van-e olyan síkbarajzolható G gráf, ami izomorf a duálisával és részgráfként tartalmaz egy C_n kört?
24. Legyen G tetszőleges síkbarajzolt gráf. Bizonyítsuk be, hogy van olyan H síkbarajzolt gráf, ami G-t részgráfként tartalmazza és emellett $H \cong H^*$.(*)