A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

8. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a c kapacitásfüggvény minden élen egész értéket vesz fel, akkor a maximális nagyságú folyamok közt létezik olyan f folyam, ami minden élen egész értéket vesz fel (azaz ha a c kapacitás egész, akkor létezik *egészfolyam* a maximális folyamok között).

Edmonds-Karp tétel: Ha a javító utas algoritmusban mindig egy lehető legkevesebb élből álló javító út mentén javítunk, akkor legfeljebb nm javítás kell a maximális folyam megtalálásához, ahol n a hálózat csúcsainak, m pedig az éleinek száma.

Def: A $G(V,E)$ gráfban éleinek M részhalmaza *független* (más szóval *párosítás*), ha F élei diszjunktak, azaz G bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És M-ben hurokélek sincsenek.) A G-beli független élek maximális számát $\nu(G) := \{|M| : M \text{ a } G \text{ párosítása}\}$ jelöli, tehát $\nu(G) = k$, ha G-nek van k páronként diszjunkt éle, de $k+1$ nincs. A G gráf egy *teljes párosítása* alatt a G olyan F párosítását értjük, amely G minden pontját *fedi*, azaz V minden pontjából indul F-nek éle.

A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független* ha U nem feszít élt, azaz U-nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli, azaz $\alpha(G) = k$, ha van G-nek k páronként nem szomszédos pontja, de $k+1$ nincs.
Az U ponthalmaz *lefogó* tulajdonságú, ha U *lefogja* G minden élét, azaz G minden élének van U-beli végpontja, más szóval $G-U$ üres gráf. A G minimális méretű lefogó ponthalmazának mérete $\tau(G) = k$ ha van k méretű lefogó ponthalmaz G-ben, de $k-1$ méretű nincs.

A G éleinek F részhalmaza *lefogó élhalmaz* ha $V(F) = V(G)$, azaz G minden csúcsából indul legalább egy F-beli él. A lefogó élhalmazok közül a legkisebb mérete $\rho(G)$, vagyis $\rho(G) = k$, ha k él le tudja fogni G minden pontját, de $k-1$ nem.

Megfigyelés: Tetszőleges véges $G = (V,E)$ gráfra (1) $\nu(G) \le \frac{1}{2}|V|$ és (2) $\nu(G) \le \tau(G)$, (3) $\alpha(G) \le \rho(G)$ (ha G-nek nincs izolált pontja), (4) $U \subseteq V$ pontosan akkor független, ha $V \setminus U$ lefogó ponthalmaz. Végül (5) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, ha G egyszerű.

Def: A $G = (V,E)$ gráfban az $U \subseteq V$ ponthalmaz *független*, ha G-nek egyetlen éle sem köti össze U két pontját. A G-beli független pontok maximális száma $\alpha(G) = k$, ha G-nek van k független pontja, de $k+1$ nincs.

Megfigyelés: (1) G tetszőleges színezésében minden színosztály független ponthalmaz. (2) G kromatikus száma a legkisebb olyan k érték, amire $V(G)$ előáll k db független ponthalmaz uniójaként. (3) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \ge |V(G)|$.

Gallai tételei: Tetszőleges véges, n pontú G gráfra (1) $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ha G hurokélmentes, és (2) $\nu(G) + \rho(G) = n$ ha G-ben nincs izolált pont.

Def: Ha $G = (V,E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X, vx \in E\}$ az X ponthalmaz G-beli szomszédsága.

Hall tétel: Tetsz. $G = (A,B;E)$ páros gráfnak pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha az bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|X| \le |N(X)|$ teljesül.

Frobenius tétele: Tetsz. $G = (A,B;E)$ páros gráfnak pontosan akkor létezik teljes párosítása, ha (1) $|A| = |B|$ és (2) $|X| \le |N(X)|$ teljesül tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmazra.

Kőnig tétel: Ha G véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

Alternáló utas algoritmus:

Input: $G = (A,B;E)$ ps gráf. Output: M maximális párosítás.

Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és javító utat keresünk. Ez olyan ú.n. alternáló út, aminek felváltva M-beliek és M-en kívüliek az élei és A egy fedetlen pontjából B fedetlen pontjába. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy M éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen út, akkor az egy javító út. Ha találtunk ilyet, akkor az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket pedig bevesszük M-be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz. Ezt követően újabb javító utat keresünk. Ha már nincs javító út, akkor az aktuális M párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Az A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető B-beli csúcsokkal és az M által fedett, A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető A-beli csúcsok egy $\nu(G)$ méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

Táblázatba sűrített tudomány

$\alpha \le \rho$	max ftn	min lef	ps gráfra $\nu = \tau$ (Kőnig)
pont	α	τ	$\nexists$ hurokél: $\alpha + \tau = n$ (Gallai 1)
él	ν	ρ	$\nexists$ iz. pont: $\nu + \rho = n$ (Gallai 2)
$\nu \le \tau \le 2\nu$			ps gráfra ($\nexists$ iz. pont) $\alpha = \rho$ (Kőnig)

Gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-reguláris páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges G gráfra $\tau(G) \le 2\nu(G)$ teljesül.
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-csúcsú, egyszerű G gráfra $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ teljesül.
4. Tfh G egyszerű, $|V(G)| = 2000$ és $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!
5. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \ge 6$.
6. Gyakoroljuk az alternáló utas algoritmust kis gráfokon.
7. Tegyük fel, hogy a G páros gráf k-reguláris, azaz minden csúcsának a fokszáma k valamely $k \ge 1$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van teljes párosítása. Igazoljuk azt is, hogy G élei úgy színezhetők ki k színnel, hogy minden csúcsból különböző színűek élek induljanak.
8. Egy $n \times n$ méretű táblázat néhány mezejét zöldre festették úgy, hogy bárhogyan is választunk ki k sort, az azokban található zöld mezők legalább k oszlophoz tartoznak. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható n zöld mező úgy, hogy azokra bástyákat állítva a bástyák közül semelyik kettő sem üti egymást.
9. A házassági tanácsadáson n pár ücsörög a váróban. Ebben a kiélezett helyzetben mindenki az asztalon heverő magazinok közül próbál egy számára érdekeset megkaparintani. Tudjuk, hogy minden várakozó legalább n magazint érdekesnek talál, ám valamiféle különös ok folytán nincs olyan magazin, amit ugyanannak a házaspárnak mindkét tagja szívesen forgatna. Bizonyítsuk be, hogy mindenki egyszerre találhat kedvére való olvasnivalót.
10. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$. (ZH '14)
11. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \le |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén. (pZH '14)
12. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf mindkét színosztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az A színosztályban minden pont foka legalább 66, B-ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy G-nek van teljes párosítása. (ZH '15)
13. Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A-ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G-nek van A-t fedő párosítása. (pZH '15)
14. Határozzuk meg a C_n kör, a K_n teljes gráf ill. a $K_{n,n}$ teljes páros gráf α, τ, ν ill. ρ paramétereit.
15. Az F élhalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk F-ről? Az U ponthalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk G-ről és U-ról?
16. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \le 75$, ha G egyszerű, összefüggő, 100-csúcsú és van 25 élű párosítása.
17. Tfh a G 110 pontú gráf és lefogható 73 éllel. Igazoljuk, hogy G-nek van 37 élű párosítása.
18. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 2001\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha (a) az $i + j$ szám 3-mal osztva 1 maradékot ad ill. (b) ha az $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg mindkét esetben a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
19. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 74\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $0 < |i - j| \le 2$. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
20. Igazoljuk, hogy tetszőleges izolált pontot nem tartalmazó G páros gráfra $\alpha(G) = \rho(G)$ teljesül.
21. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráf egy lefogó élhalmaza független élekből áll. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét, azaz a G-t lefogó pontok minimális számát. (ZH'14)