

# A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

7. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

## Tudnivalók

**Def:** A  $G$  egyszerű gráf csúcsainak egy *színezésén* színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző szint kapnak. ( $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ , amire  $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$ .) Egy színezésben azonos szint kapó csúcsok halmaza a *színosztály*. A  $G$  gráf *kromatikus száma*  $\chi(G) = k$ , ha  $G$  kiszínezhető  $k$  színnel, de  $(k - 1)$ -gyel nem.

**Def:** A  $G$  gráf *páros*, ha  $G$  2-színezhető, azaz ha  $\chi(G) \leq 2$ .

**Tétel:** Tetszőleges  $G$  irányítatlan gráf pontosan akkor páros, ha  $G$ -nek nincs páratlan köre.

**Def:** A  $G$  gráf *klikkje* a  $G$  egy teljes részgráfja. A  $G$  legnagyobb klikkjének méretét  $\omega(G)$  jelöli. (Azaz  $\omega(G) = k$ , ha  $G$ -ben van  $k$  méretű klikk, de nincs  $k + 1$  méretű.)

**Állítás:** Ha  $G$  véges, egyszerű, akkor  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Def:** A *hálózat* egy  $(G, s, t, c)$  négyes, ahol  $G = (V, E)$  egy irányított gráf,  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  kapacitásfüggvény és  $s, t \in V$  a  $G$  különböző csúcsai, ún. *termináljai* ( $s$  a *termelő*,  $t$  a *fogyasztó*). A fenti hálózaton  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  egy *folyam*, ha  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  minden  $e \in E$  élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és  $\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$  tetszőleges  $v \in V \setminus \{s, t\}$  csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-feltétel*). Az  $f$  *folyam nagysága* (elavult szóhasználattal az  $f$  *folyam értéke*) az  $s$ -ből kifolyó nettó folyammennyiség:  $\sum_{su \in E} f(su) - \sum_{us \in E} f(us)$ .

**Def:** A fenti hálózatban ha  $X \subset V$  olyan halmaz, hogy  $s \in X \not\subseteq t$ , akkor a hálózat  $X$  által indukált *(st-)vágása* az  $X$  és  $V \setminus X$  között futó élek halmaza, melybe beletartoznak a  $V \setminus X$ -ből  $X$ -be futó élek is. Az  $X$  által indukált *st-vágás* kapacitása  $c(X) := \sum_{u \in X, v \in V \setminus X} c(uv)$ , azaz az  $X$ -ből  $V \setminus X$ -be futó élek összkapacitása.

**Lemma:** Ha  $(G, s, t, c)$  egy hálózat,  $f$  egy folyam és  $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$  egy *st-vágást* indukál, akkor  $m_f = \sum_{v \in X, u \in V \setminus X} f(vu) - f(uv)$ , azaz a folyam nagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel. **Köv.:** Ha  $f$  megengedett folyam és  $X$  *st-vágást* indukál, akkor  $m_f \leq c(X)$ .

**Állítás:** A  $(G, s, t, c)$  egy hálózat  $f$  folyama pontosan akkor maximális (azaz az  $m_f$  folyam nagyság akkor legnagyobb), ha  $m_f = c(X)$  egy  $X$  által indukált *st-vágásra*.

**Ford-Fulkerson tétel:** Tetszőleges hálózatban  $\max m_f = \min c(X)$ .

**Def:** Ha  $(G, s, t, c)$  egy hálózat,  $f$  pedig egy folyam, akkor a  $G_f = (V(G), E_f)$  az  $f$ -hez tartozó *segédgráf*, melyre  $uv \in E_f$  ha  $uv \in E(G)$  és  $f(uv) < c(uv)$  (*előreél*) vagy ha  $vu \in E(G)$  és  $f(vu) > 0$  (*visszaél*). Az  $f$  folyamhoz egy *javító út* a  $G_f$  segédgráf egy  $s$ -ből  $t$ -be vezető irányított útja.

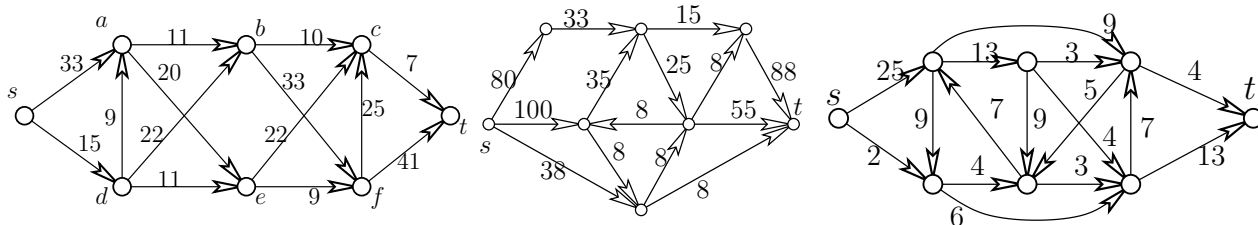
**Állítás:** Ha egy  $f$  folyamhoz tartozó  $G_f$  segédgráfban pontosan akkor létezik javító út, ha  $f$  nem maximális nagyságú. A javító út mentén az előreéleken  $\varepsilon$ -nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken  $\varepsilon$ -nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamat, a folyam nagysága  $\varepsilon$ -nal növelhető.

**Javító utas algoritmus** Kiindulunk a  $f \equiv 0$  folyamból, és addig növelünk az aktuális  $f$ -hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs további javítás, akkor a folyam maximális. A segédgráfban  $s$ -ből elérhető pontok  $X$  halmaza ekkor minimális *st-vágást* indukál.

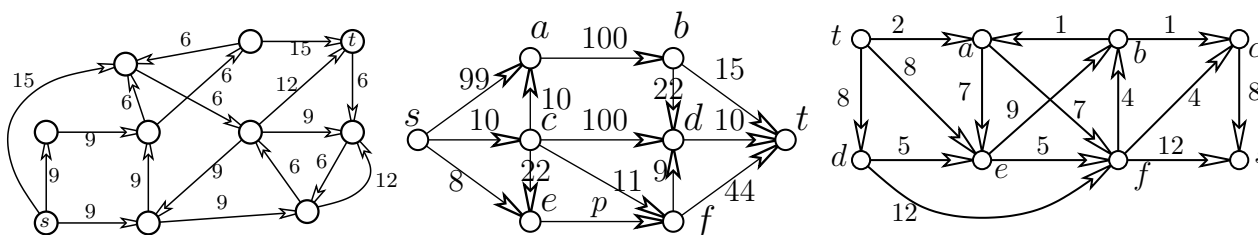
## Gyakorlatok

1. Rajzolgassunk kis gráfokat, és színezzük ki a csúcsaikat a lehető legkevesebb színnel.
2. A  $G$  gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a  $G$  gráf  $\chi(G)$  kromatikus száma?
3. Legyen  $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , és legyen  $ij \in E(G)$ , ha  $|i - j| \leq 7$ . Mennyi az így meghatározott  $G$  gráf  $\chi(G)$  kromatikus száma?
4. Van-e olyan  $G$  gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de  $G$  mégsem színezhető ki 3 színnel?
5. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  véges, egyszerű gráf, akkor  $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ , ahol a független pontok maximális száma  $\alpha(G) = k$ , ha  $G$ -ben van  $k$  db páronként nem szomszédos csúcs, de  $k + 1$  már nincs.
6. Legyenek  $K$  és  $H$  a  $G$  gráf két komponense. Legyen  $G'$  az a gráf, amit  $G$ -ből úgy kapunk, hogy  $K$  minden pontját összekötjük  $H$  minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$  ill.  $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$ .
7. Legfeljebb hány éle lehet annak az  $n$  csúcsú  $G$  gráfnak, amire  $\chi(G) \leq 2$ ? És ha  $\chi(G) \leq 3$ ?
8. Igazoljuk, hogy ha  $G$  egyszerű gráf, akkor  $|E(G)| \geq \binom{n}{2}$ .
9. Mik azok a véges, egyszerű  $G$  gráfok, melyekre  $\chi(G) = 3$  és  $\chi(G - e) < 3 \forall e \in E$ ? Milyen  $n$ -csúcsú, egyszerű  $G$  gráfra teljesül, hogy  $\chi(G) = 3$  és  $\chi(G - v) < 3 \forall v \in V$ ?

10. Mutassunk a bal oldali ábrán látható  $(G, s, t, c)$  hálózatban egy minimális kapacitású  $st$ -vágást. Találjunk a középső ábrán látható hálózatban minimális kapacitású  $st$ -vágást és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású  $st$ -vágás. (ZH '16, pZH '14)
11. A síthek Sötét Testvérisége a jobb oldalon látható gráf  $s$  csúcsából készül csapást mérni a Jedi Tanács  $t$  támaszpontjára oly módon, hogy a síthek a gráf élei mentén szeretnének  $t$ -be eljutni. (Egy sith sosem halad visszafelé egy élen.) Az élekre írt számok azt jelzik, hány jedi őrszemet kell az adott útvonalra telepíteni ahhoz, hogy az ott próbálkozó sítheket megállítsák. Határozzuk meg, legalább hány őrszem szükséges a támaszpont biztosításához, azaz ahhoz, hogy egyetlen sith se tudjon  $s$ -ből  $t$ -be jutni. (ZH '15)



12. Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó  $(G, s, t, c)$  hálózatban a maximális folyam nagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)



13. Határozzuk meg a fenti középső hálózatban az  $ef$  él  $p$  kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális  $st$ -folyam nagyság pontosan 42. (pZH '15)

Határozzuk meg a maximális folyam nagyságot a  $p$  paraméter függvényében.

14. Baj van: átszakadt a hegytetőn a zagy tározó gátja. Szerencsére az iszap nem veszélyes, slaggal lemosható. A fenti jobb oldali ábrán  $t$  jelzi a tározót,  $s$  pedig a szerencsétlen helyen fekvő várost, amit meg kell védeni. A nyilak arra vezetnek, amerre az adott mélyedésben folyik a zagy. (Furcsa itt a gravitáció: megtörténhet, hogy végig lejt egy a kiindulópontjába visszatérő útvonal.) A nyíl mellett álló számok azt mutatják, hogy a katasztrófavédelemnek hány percig tart elzárni az adott nyíl mentén lezúduló folyadék útját. Cél: a lehető leggyorsabban zárjunk le minden lehetséges  $s$ -be vezető utat az arra áramló melléktermék előtt. Mivel csak egy munkagép működik, ezért a kiválasztott útvonalakat csak egymás után zárhatjuk le. Segítsünk a katasztrófavédelemnek: határozzuk meg, mennyi a szükséges legrövidebb idő, ami alatt a munka elvégezhető. Bizonyítsuk be azt is, hogy kevesebb idő nem elég minderre. (ZH '10)
15. Adott a  $D$  irányított gráf valamint élein egy  $c$  kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha  $s, t$  és  $w$  a  $D$  olyan csúcsai, hogy létezik  $D$ -ben  $m$  nagyságú  $st$ -folyam és  $m$  nagyságú  $tw$ -folyam is, akkor  $D$ -ben létezik  $m$  nagyságú  $sw$ -folyam.

16. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív  $\varepsilon$ -nal csökkentve a maximális folyam nagyság is pontosan  $\varepsilon$ -nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas  $\varepsilon$ -nal növelve, a maximális folyam nagyság is  $\varepsilon$ -nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él?

17. Legyen  $s$  és  $t$  egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit  $s$ -től  $t$  felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális  $st$ -folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen?

18. Igazoljuk, hogy ha a  $(G, s, t, c)$  hálózatban a  $c$  kapacitások egészek és  $f$  egy megengedett folyam, akkor létezik olyan megengedett  $f'$  folyam is, amelyre  $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$  teljesül minden  $e$  élre. (\*)

19. Egy  $(G, s, t, c)$  hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú  $st$ -folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú  $st$ -folyam nagysága legalább 15. (\*)