# A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

4. gyakorlat Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

## Tudnivalók

**Def:** Adott $G=(V,E)$ (ir) gráf és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy $G$-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza, $dist(u,v)$ pedig az (ir) $uv$-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli. Az $\ell$ hosszfv *konzervatív*, ha nincs $G$-ben negatív összhosszú (ir) kör.

**Def:** Adott $G=(V,E)$ (ir) gráf, $r \in V$ és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. A $d : V \to \mathbb{R}$ függvényt $(r,\ell)$-*felső becslés*nek nevezzük, ha $d(v) \geq dist(r,v)$ teljesül $G$ minden $v$ csúcsára. Az $e = vw$ *él menti javítás* azt jelenti, hogy a $d(w)$ értéket a $\min\{d(w), d(v)+\ell(vw)\}$ értékkel helyettesítjük.

**Megfigyelés:** (1) Tetsz. $(r,\ell)$-felső becslés élmenti javítás után is $(r,\ell)$-felső becslést marad. (2) Ha élmenti javítás nem tud változtatni a $d$ $(r,\ell)$-felső becslésen, akkor $d(v) = dist(r,v)$ $\forall v \in V$.

**Dijkstra-algoritmus** Input: $G=(V,E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $r \in V$ gyökér. Output: $dist(r,v)$ minden $v \in V$-re és egy „legrövidebb utak fája". Működés: Kezdetben $U_0 := \emptyset$, $d(r)=0$ és $v \neq r$ esetén $d(v)=\infty$. Az algoritmus $i$-dik fázisában ($i=1,2,\ldots$) a következő történik. 1. A legyen $u_i$ az a $v$ csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $d(v)$ minimális és legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$. 2. Végezzünk él menti javításokat minden $U_i$-ből kivezető $u_i x$ élen. 3. $i := i+1$
Ha $|V| = n$, akkor az $n$-dik fázis után $dist(r,v) = d(v)$ teljesül minden $v \in V$-re. Ha minden $r$-től különböző $v$ csúcshoz feljegyezzük, melyik élmenti javításból származik a végső $d(v)$ érték, akkor az így megjelölt élek alkotják a legrövidebb utak fáját.

**Megfigyelés:** Ha $d$ a végső $(r,\ell)$-felső becslés, akkor (1) $d(u_i) \leq d(u_{i+1})$ $\forall 1 \leq i < n$-re (2) $d(u_1) \leq d(u_2) \leq \ldots \leq d(u_n)$, valamint (3) Élmenti javítás nem változtat $d$-n.

**Köv.:** A Dijkstra algoritmus helyesen működik, és lépésszáma legfeljebb $konst \cdot n^2$.

**Ford-algoritmus** Input: $G=(V,E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}$ konzervatív hosszfv, $r \in V$ gyökérpont. Output: $dist(r,v)$ minden $v \in V$-re. Működés: Legyen $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Kezdetben legyen $d(r)=0$ és $v \neq r$ esetén $d(v)=\infty$. Az $i$-dik fázis $i = 1,2,\ldots,n-1$ esetén abból áll, hogy elvégezzük az $e_1, e_2, \ldots, e_m$ élek menti javításokat. A végén az output $dist(r,v) = d(v)$ minden $v$-re.

**Állítás:** (1) A Ford algoritmus $i$-dik fázisa után $dist(r,v) = d(v)$ minden olyan $v$-re, ahova van legfeljebb $i$ élű legrövidebb út $v$-ből. (2) A Ford algoritmus lépésszáma legfeljebb $c \cdot n^3$. (3) Ahogy Dijkstra esetén, itt is legrövidebb utak fáját alkotják a végső $d(v)$ értékeket beállító élek.

**Floyd-algoritmus** Input: $G=(V,E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}$ konz. Output: $dist(u,v)$ $\forall u,v \in V$. Működés: Legyen $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és $d^{(k)}(i,j)$ a legrövidebb olyan $v_i v_j$ út hossza, aminek belső pontjai csak $v_1, v_2, \ldots v_k$ lehetnek. Kezdetben $d^{(0)}(i,j) = \ell(v_i,v_j)$, ha $v_i v_j \in E$, különben $d^{(0)}(v_i,v_j) = \infty$. A $k$-dik fázisban

$$d^{(k)}(i,j) = \min\{d^{(k-1)}(i,j), d^{(k-1)}(i,k) + d^{(k-1)}(k,j)\} \qquad (1)$$

alapján a $d^{(k)}$ függvényt határozzuk meg. Az $n$-dik fázis után $dist(v_i,v_j) = d^{(n)}(i,j)$ az output.

**Állítás:** Az (1) fennáll, tehát a Floyd algoritmus helyes. Lépésszáma pedig legfeljebb $konst \cdot n^3$.

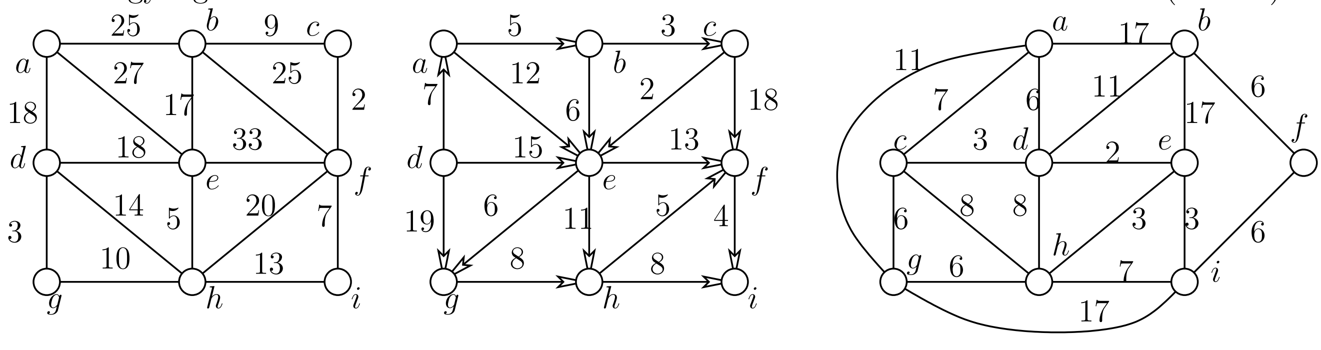
**Def:** Ha $G=(V,E)$ gráfon $w : E \to \mathbb{R}_+$ szélességfüggvény, akkor egy $P$ út *szélessége* a legkeskenyebb $P$-beli él szélessége: $w(P) := \min\{w(e) : e \in E(P)\}$.

**Tétel:** Ha $G$ irányítatlan és $w$ egy szélességfüggvény, akkor a Kruskal algoritmust csökkenő szélesség szerinti sorrendben futtatva olyan fát kapunk, amely bármely két csúcs között egy legszélesebb $G$-beli utat tartalmaz.

## Gyakorlatok

1. Rajzoljunk gráfot, és keressük meg egy csúcsból kiindulva a BFS fáját. Megfelelő élhosszok megadásával gyakoroljuk a Dijkstra, Ford és Floyd algoritmusokat. Keressünk legszélesebb utakat irányítatlan gráfokban. Használjuk erre bátran a feladatlap végén található gráfokat.
2. Legyen $G=(V,E)$ (irányított) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény és legyenek $u,v,w$ a $G$ csúcsai. Igazak-e az alábbi állítások? (1) Ha $P$ a $G$ egy legrövidebb $uv$ útja és $w$ csúcsa $P$-nek, akkor a $P$ út $u$-tól $w$-ig tartó ill. $w$-től $v$-ig tartó részei a $G$ egy legrövidebb $uw$- ill. $wv$-útját alkotják. (2) Ha $P_1$ és $P_2$ a $G$ egy legrövidebb $uw$- ill. $wv$-útja, akkor a $P_1$ és $P_2$ egymás után fűzése a $G$ egy legrövidebb $uv$-útja lesz.
3. Tervezzünk csavaranyákból és cukorspárgából épített, gravitációs elven működő mechanikus számítógépet, amely alkalmas adott irányítatlan gráfhoz megadott nemnegatív élhosszfüggvény mellett tetszőleges gyökérből minden más csúcs távolságának a meghatározására.

4. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, valamint egy $r$ gyökérpont. Egyetlen Dijkstra algoritmus lefuttatása segítségével találjuk meg $G$ mindazon $e$ éleit, amelyekre igaz az, hogy önmagában attól, hogy $e$ hosszát eggyel csökkentjük egyetlen csúcs $r$-től mért távolsága sem csökken.
5. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény valamint egy $e = uv \in E$ él. Javasoljunk gyors eljárást annak a maximális $\lambda$ értéknek a meghatározására, amennyivel $G$ két csúcsának a távolsága megnövekszik akkor, ha töröljük az $e$ élt $G$-ből.
6. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_iv_j \in E(G)$, ha $i$ és $j$ nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a $v_iv_j$ él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a $v_5$ csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van. (pZH '14)
7. Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf élein egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény. Igaz-e, hogy ha $P$ a $G$ egy legrövidebb $uv$-útja az $\ell$ hosszfüggvényre, akkor $P$ egyúttal legrövidebb út az $\ell'$ hosszfüggvényre is, ahol $\ell'(e) = \ell(e)^2$ teljesül $G$ minden $e$ élére? (ppZH '14)
8. Forintot szeretnénk különféle valutákra átváltani. Külföldön élő ismerőseink révén nem csak forintot, hanem számos más valutát is közvetlenül át tudunk váltani bizonyos valutákra. A cél, hogy esetleg ilyen átváltások felhasználásával minél jobb árfolyamot érjünk el a forintunk konverziója során. E célból elkészítettünk egy irányított gráfot, aminek a csúcsai az egyes valutáknak, az élek pedig az egyes közvetlen tranzakcióknak felelnek meg. Minden $uv$ élhez ismert az adott váltásnál alkalmazott árfolyam, azaz, hogy hány egységet kell fizetnünk az $u$ pénznemben a $v$ pénznem egy egységéért. Adjunk hatékony módszert arra, hogy meghatározzuk, legfeljebb mennyit kaphatunk az egyes valutákból 1 Ft-ért, ill. határozzuk meg azt is, milyen átváltásokat kell ehhez végeznünk.
9. (*) Adott $n \times k$ méretű táblázat minden mezőjében 0 vagy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan utat, amire igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni? (Hint: alighanem vmiféle gráfban kéne legrövidebb utat keresni.)
10. Legyenek a 7 csúcsú $G$ gráf pontjai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ és $v_9$, valamint akkor legyen $v_i$ és $v_j$ szomszédos, ha $i$ és $j$ relatív prímek. Ekkor a $v_iv_j$ él szélessége $|i - j|$. Határozzunk meg a $v_1$ csúcsból minden más csúcsba egy-egy legszélesebb utat. (ZH '14)
11. Legyen $G$ a bal oldali ábrán látható gráf, az élekre írt számok az adott él szélességét jelentik. Van-e $G$-nek olyan feszítőfája, amely $G$ bármely két csúcsa között tartalmazza $G$ egy legszélesebb útját? Ha van ilyen fa, akkor adjunk meg egyet. (ZH '16)
12. Ismét a bal oldali ábrán látható gráfot vizsgáljuk. Most az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden $e$-től különböző $v$ csúcsra egy legrövidebb $ev$ utat. (ZH '16)



13. (*) Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív élhosszfüggvény, $e = uv$ pedig $G$ egy éle. Javasoljunk gyors eljárást, amelynek segítségével megtalálhatók $G$ mindazon $w$ csúcsai, amelyek számára *fontos* az $e$ él. (Az $e$ él akkor fontos $w$ számára, ha van olyan $t$ csúcs $G$-ben, amelynek a $w$-től mért távolsága csökken, az $\ell(e)$ bármilyen kis mértékű csökkentése nyomán.)