A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A G gráf H részgráfja a G *feszítőfája*, ha $V(H) = V(G)$ és H fa.

Állítás: Tetsz. G gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Def: Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges G' részgráfjának *költsége* a $E(G')$ élhalmazbeli élek költségeinek összege.

Kruskal (mohó) algoritmus: Input: $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfüggvény. Output: a G egy minimális költségű feszítőfájának F élhalmaza. Működés: Legyen $F_0 = \emptyset$, és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, ahol $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$. Az output $F = F_m$, ahol

$$F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{e_i\} & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_i & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

Tétel: A Kruskal algoritmus által kiszámított F élhalmaz a G egy min költségű feszítőfája.

Def: A $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf egy *bejárásán* a V-beli csúcsok végiglátogatását értjük, ahol a alábbiak szerint. A csúcsok állapota kezdetben *eléretlen*, idővel *elértté* válik, a bejárás végére pedig *befejezett* lesz (mégpedig akkor, amikor észrevesszük, hogy onnan már nem tudunk újabb csúcsot elérni). A bejárás egy lépése: ha minden csúcs *bejárt* állapotú, akkor a bejárás véget ér. Különben, ha nincs *elért* csúcs, akkor egy tetszőleges eléretlen v csúcsot *elértté* teszünk. Egyébként van *elért* csúcs, legyen u ilyen. Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v *elértté* válik az uv él mentén. Ha nincs ilyen uv él, akkor u *befejezetté* válik, és újabb lépés következik. (Irányítatlan gráf esetén minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.) A bejárás során kialakul a csúcsok egy *elérési* ill. egy *befejezési sorrendje*, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el. Ez utóbbi élek az ún. *faélek*, és a bejárás *fáját* alkotják (ami egyrészt lehet irányított, másrészt pedig erdő). A G gráf uv éle *előreél*, ha u a bejárás fájában a v őse, az uv *visszaél*, ha u a v leszármazottja, G egyéb élei a *keresztélek*.

Megfigyelés: Irányítatlan gráf bejárása után az előreélek megegyeznek a visszaélekkel.

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy r gyökércsúcs. A szélességi bejárás során az r csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, valamint azt a további szabályt követeljük meg, hogy a lehető legkorábban elért csúcsból próbáljuk a soron következőnek elért csúcsot elérni. A bejáráshoz tartozó fa neve *szélességi fa*.

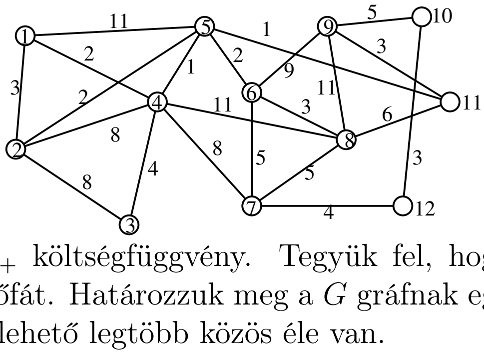
Megfigyelés: (1) Szélességi bejárás során az elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel. (2) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a szélességi bejárás során az elérési sorrend és $i < j < k \le \ell$, akkor $v_i v_\ell \in E(G)$ esetén $v_j v_k$ nem lehet faél, azaz gráfél nem ugorhat át faélt.

Köv.: (1) Szélességi keresés után nincs előreél.
(2) A BFS bejárás fája az r csúcsból minden más csúcsba a G gráf egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) legrövidebb útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G-beli távolsága r-től megegyezik az r gyökerű szélességi fán mért távolsággal.

Tétel: A szélességi bejárás lépésszáma legfejlebb $konst \cdot (n+m)$, ahol $n = |V(G)|$ és $m = |E(G)|$.

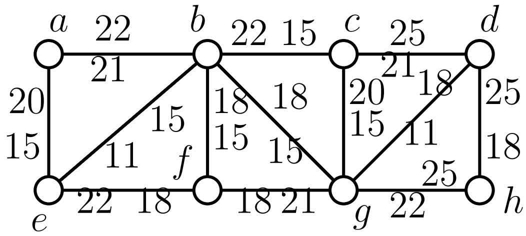
Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza, $dist(u, v)$ pedig az (ir) uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli.

Gyakorlatok

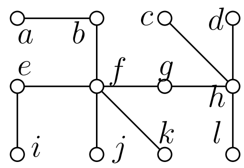


1. Hány feszítőfája van annak a gráfnak, amelynek csúcsai u_1, u_2 ill. $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és élei az összes lehetséges $u_i v_j$ párok, ahol $i = 1, 2$ ill. $j = 1, 2, \ldots, n$?
2. Keressünk a jobb oldali ábrán látható gráfban minimális költségű feszítőfát! Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak?
3. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.

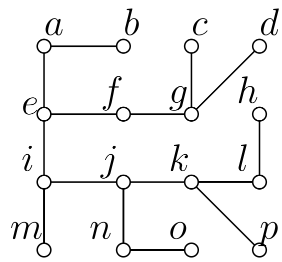
4. A jobb oldali ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15)



5. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével lényegében ingyen meg tudná építtetni a Rátót és Piripócs közti vezetéket. Ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
6. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
7. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
8. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)
9. Törpfalván kitört a járvány: csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
10. Gyakoroljuk a BFS algoritmust irányított gráfon olyan r gyökércsúcsból indulva, ahonnan nem érhető el G minden csúcsa irányított úton.
11. A felső ábrán látható valamely G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G-ben? (pZH'14)



12. Az alsó ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit. (pZH'15)



13. Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
14. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat, amiben minden mezőben egy 0 vagy egy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan vonalat, amire az igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni?
15. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?