A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

12. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A Π probléma *polinomidőben visszavezethető* a Π' problémára (jelölése $\Pi \preceq \Pi'$), ha a Π tetszőleges I inputjához polinomidejű algoritmussal konstruálható a Π' problémának olyan I' inputja, melyre (Π'-ben) ugyanaz a válasz, mint I-re Π-ben.

Megfigyelés: (1) $\Pi \preceq \Pi' \preceq \Pi'' \to \Pi \preceq \Pi''$. (2) $\Pi \preceq \Pi' \in P \Rightarrow \Pi \in P$.

Def: A Π döntési probléma *NP-nehéz*, ha $\Pi' \preceq \Pi$ minden $\Pi' \in NP$ esetén, azaz minden NP-beli probléma visszavezethető Π-re. A Π *NP-teljes*, ha $\Pi \in NP$ és Π NP-nehéz.

Megfigyelés: Ha Π NP-teljes és $\Pi \preceq \Pi' \in NP$, akkor Π' is NP-teljes.

Def: A SAT probléma inputja egy CNF, outputja „igen", ha az inputban szereplő logikai változók logikai értéke megválasztható úgy, hogy az adott CNF kiértékelése „igaz" legyen. Minden CNF klózok összeéselése, minden klóz literálok összevagyolása és minden literál azonos valamelyik logikai változóval vagy annak negáltjával. **Példa:** : $(\overline{x}_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_7) \wedge (x_2 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_4 \vee x_5 \vee x_7) \wedge (\overline{x}_4 \vee \overline{x}_6)$

Cook-Levin tétel: A SAT probléma NP-teljes.

További NP-teljes problémák: (1) HAM (Input: G gráf, output: IGEN, ha G-nek van Hamilton köre), (2) 3-SZÍN (Input: G gráf, output: IGEN, ha $\chi(G) \le 3$), (3) $k \ge 3$ esetén a k-SZÍN (Input: G gráf, output: IGEN, ha $\chi(G) \le k$), (4) MAXFTN (Input: G gráf, $k > 0$ egész, output: IGEN, ha $\alpha(G) \ge k$) (5) MAXKLIKK (Input: G gráf, $k > 0$ egész, output: IGEN, ha $\omega(G) \ge k$)

Gyakorlatok

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák P-beliek:
   (a) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e benne kör.
   (b) Adott G irányítatlan gráfról és k pozitív egészről döntsük el, van-e olyan részgráfja, amiben minden fok $\ge k$.
   (c) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e K_{10} részgráfja.
   (d) Adott G öf gráfról és $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e,hogy G bármely feszítőfájának a költsége legalább k.
   (e) 2-SAT (A SAT probléma, ahol minden klóz legfeljebb két literált tartalmaz.)
2. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-beliek:
   (a) Adott G irányítatlan gráfról és k pozitív egészről döntsük el, van-e k-reguláris részgráfja.
   (b) Adott G öf gráfról és $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e, hogy G-nek van pontosan k költségű feszítőfája.
   (c) Adott G gráfról és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ (esetleg negatív) élhosszokról döntsük el, igaz-e, hogy G bármely két csúcsának a távolsága legfeljebb k
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák $co-NP$-beliek:
   (a) Adott G gráfról döntsük el, síkbarajzolható-e.
   (b) Adott $2n$ csúcsú G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy bármely n csúcsa páros gráfot feszít.
   (c) Adott G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy $\omega(G) \le k$.
   (d) Adott n számról döntsük el, hogy prímhatvány-e.
4. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák $NP \cap co-NP$-beliek:
   (a) Adott G gráfról döntsük el, páros-e.
   (b) Adott G gráfról döntsük el, összefüggő-e.
   (c) Adott G páros gráfról döntsük el, van-e teljes párosítása.
   (d) Adott hálózatról döntsük el, van-e benne k nagyságú folyam.
   (e) Adott n és k egészekről döntsük el, relatív prímek-e.
5. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-teljesek:
   (a) FÉLHAM inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G-nek van olyan köre, ami G csúcsainak legalább a felét tartalmazza
   (b) FELE-3-SZÍN inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G-nek van olyan 3-színezhető feszített részgráfja, amely G csúcsainak legalább a felét tartalmazza.
   (c) MAXTÁV inputja egy $G = (V, E)$ gráf, egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény valamint egy $k \in \mathbb{R}_+$ szám. Az output akkor IGEN, ha G-ben van legalább k összhosszú út.