

# A számítástudomány alapjai 2017. I. félév

10. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

## Tudnivalók

**Ötszintétel:** Ha  $G$  egyszerű és SR, akkor  $\chi(G) \leq 5$ .

**Négyzintétel:** Ugyanez, 4-gyel.

**Def:** Ha  $a, b, k \in \mathbb{Z}$  és  $b = k \cdot a$ , akkor  $a$  osztója  $b$ -nek ( $b$  többszöröse  $a$ -nak), jelölése  $a \mid b$ .

**Def:** Az  $a$  és  $b$  számok legnagyobb közös osztója az  $a$  és  $b$  közös osztói közül a legnagyobb:  $(a, b) := \max\{d : d \mid a, d \mid b\}$ , legkisebb közös többszörösük pedig az  $a$  és  $b$  pozitív közös többszöröseik közül a legkisebb:  $[a, b] := \min\{0 < d : a \mid d, b \mid d\}$ . Az  $a$  és  $b$  egészek relatív prímek, ha  $(a, b) = 1$ , azaz nincs közös prímosztójuk (a kanonikus alakjaikban szereplő prímek különbözők).

**Megf**  $(d \mid a, d \mid b) \iff (d \mid a, d \mid b - a)$  **Köv.:**  $\{a \text{ és } b \text{ közös osztói}\} = \{a \text{ és } b - a \text{ közös osztói}\}$ .

**Köv.:** Ha  $a, b$  egészek, akkor  $(a, b) = (a - b, b) = (a - kb, b)$  tetszőleges egész  $k$  esetén.

**Euklideszi algoritmus** Input:  $a_0 > a_1 \in \mathbb{Z}$ . Output:  $(a_0, a_1)$ . Működés: Legyen  $i = 0, 1, \dots$ -re  $a_i = h_{i+1}a_{i+1} + a_{i+2}$ , ahol  $0 \leq a_{i+2} < a_{i+1}$ . Ha  $a_{k+1} = 0$ , akkor  $(a_0, a_1) = (a_1, a_2) = (a_2, a_3) = \dots = (a_k, 0) = a_k$  a keresett ltko.

**Def:** A  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $|p| > 1$  szám felbonthatatlan, ha csak  $1 \cdot p, p \cdot 1, (-1) \cdot (-p)$  és  $(-p) \cdot (-1)$  alakban áll elő egészek szorzataként. (Azaz, ha  $a \mid p$  és  $1 < |a|$ , akkor  $|a| = |p|$ .) A  $z \in \mathbb{Z}$  összetett, ha  $|z| > 1$  és  $z$  nem felbonthatatlan. A  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $|p| > 1$  szám prím, ha  $p \mid ab$ ,  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \mid a$  vagy  $p \mid b$ . (Egészek szorzatát csak úgy oszthatja, ha valamelyik tényezőt osztja.)

**Állítás:** Tetszőleges 1-nél nagyobb egész szám előáll felbonthatatlan számok szorzataként.

**A számelmélet alaptétele:** Tetszőleges  $1 < |n|$  egész a tényezők sorrendjétől és előjelétől eltekintve egyért. áll elő felbonthatatlan számok szorzataként. **Köv.:**  $p$  felb.thatatlan  $\iff p$  prím.

**Def:** Az  $n$  kanonikus alakja  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ , ahol a  $p_i$ -k prímek, és  $1 \leq \alpha_i \in \mathbb{N} \forall i$ .

**Állítás:** Egy  $d > 0$  egész pontosan akkor osztója  $n$ -nek, ha  $d$  kan. alakjában csak  $n$  prímosztói szerepelnek, legf az  $n$  kan. alakjában szereplő kitevőn. ( $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \Rightarrow d = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ .)

**Köv.:** Ha  $1 < n$  kan. alakja  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ , akkor  $n$  poz. osztóinak száma  $d(n) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)$ .

**Állítás:** Ha  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  és  $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$  ( $\alpha_i = 0$  és  $\beta_i = 0$  is lehet), akkor  $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$ , ill.  $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$ .

**Tétel:** Végtelen sok prímszám van. Bármely  $n \in \mathbb{N}$ -re létezik  $n$  egymást követő összetett szám.

**Nagy prímszámtétel:**  $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ , azaz  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1$ , ahol  $\pi(x)$  az 1 és  $x$  közti prímek száma.

**Csebisev tétel:** Minden  $0 < n \in \mathbb{N}$ -re létezik  $p$  prím, melyre  $n \leq p \leq 2n$ .

**Def:**  $a, b, m \in \mathbb{Z}$  esetén  $a \equiv b \pmod{m}$  ( $a$  kongruens  $b$  modulo  $m$ , röviden  $a \equiv b(m)$ ), ha  $m \mid a - b$ .

**Megfigyelés:** A  $\mathbb{Z}$  halmaz előáll  $m$  db halmaz diszjunkt uniójaként a tulajdonsággal, hogy két egész pontosan akkor kongruens modulo  $m$ , ha ugyanabba a részhalmazba esnek. (Az  $i$ -dik ilyen részhalmazba a  $\{i + km : k \in \mathbb{Z}\}$  számok tartoznak.) E részhalmazok az  $m$  szerinti maradékosztályok.

**Kongruenciák tulajdonságai:**  $\forall a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$ -re (1)  $a \equiv a(m)$ , (2)  $a \equiv b(m) \Rightarrow b \equiv a(m)$

(3)  $a \equiv b(m), b \equiv c(m) \Rightarrow a \equiv c(m)$  (4)  $a \equiv b(m), c \equiv d(m) \Rightarrow a + c \equiv b + d(m), ac \equiv bd(m)$

(5)  $a \equiv b(m) \iff ac \equiv bc(mc)$  (6)  $ad \equiv bd(m) \Rightarrow a \equiv b \left( \frac{m}{(m,d)} \right)$

**Def:** Lineáris kongruencia:  $ax \equiv b(m)$ , ahol  $a, b \in \mathbb{Z}$  és  $m > 1$  egész. A lineáris kongruencia megoldása alatt mindazon  $x \in \mathbb{Z}$  számok meghatározását értjük, amelyekre a kongruencia teljesül.

**Tétel (lineáris kongruenciák megoldása):** Az  $ax \equiv b(m)$  kongruencia megoldható  $\iff (a, m) \mid b$ . Ekkor  $(a, m)$  db modulo  $m$  maradékosztály a megoldás.

**Lin. kongruencia gyakorlati megoldása I. módszer:** Ügyeskedés. Az  $ax \equiv b(m)$  lin kongruenciában az  $|a|$ -t csökkentjük 1-ig az alábbiakvivalens az átalakítások segítségével. (1)  $a$ -t vagy  $a$ -t vele kongruens, alkalmas másik számmal helyettesítjük,

(2) ha  $d = (a, b) > 1$ , akkor osztunk (az  $m$  modulust is  $(m, d)$ -vel),

(3) az  $m$  modulushoz relatív prímmel szorzunk (és a modulust nem bántjuk).

Az átalakítások során a cél az  $x$  ismeretlen  $a$  együtthatója abszolút értékének csökkentése 1-ig.

**II. módszer:** az Euklideszi algoritmus mintájára. Az  $ax \equiv b(m)$  kongruenciát kiegészítjük az  $mx \equiv 0(m)$  kongruenciával egy kongruenciarendszerré, és ezt oldjuk meg. Egy lépésben abból a kongruenciából, ahol nagyobb az  $x$  együtthatója kivonjuk a másikat és e különbségre cseréljük a nagyobb együtthatós kongruenciát. Ezt a lépést addig végezzük, amíg valamelyik kongruenciában  $x$  együtthatója 0 nem lesz. Ha itt a jobb oldalon nem 0 áll, akkor nincs megoldás, különben a másik kongruenciát kell leosztani  $x$  együtthatójával.

## Gyakorlatok

1. Melyek  $p$  prímre lesz (a)  $p + 10$  és  $p + 14$  prím? (b)  $p^2 + 2$  prím? (c)  $p^2 + 4$  és  $p^2 + 6$  prím?
2. Igazoljuk, hogy bármely hat egymást követő egész szám szorzata osztható 720-szal.
3. Bizonyítsuk be, hogy minden  $n$  pozitív egész egyértelműen írható  $n = k^2 \cdot l$  alakban, ahol  $k$  és  $l$  pozitív egészek, továbbá  $l$  egyetlen négyzetszám osztója az 1.
4. Számítsuk ki a (372, 504) ill. (612, 834) legnagyobb közös osztókat.
5. Legyen  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , és  $n \geq 2$  esetén az  $n$ -dik Fibonacci szám  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Igazoljuk, hogy  $F_n$  és  $F_{n+1}$  relatív prímek.
6. Öröm és boldogság: ma van Dzszenifer születésnapja. Ezért matek és földrajz helyett Britnival, a barátnőjével plázába mentek okostelefont nézni. Kipróbálták a legújabb, facebookon agyonlájolt, minden eddiginél okosabb születésnapi appot és megállapították, hogy Dzszenifernek feltétlenül vennie kell egy rózsaszín szelfibotot a jóképű eladótól, ugyanis ma (2015-ben) az életkora osztója az aktuális évszámnak. Márpedig az app szerint ilyenkor különösen sok szerencse éri a horoszkópokban kellőképpen jártas beavatottakat. Meg tudjuk-e mondani a fizetős appra történő regisztráció nélkül, hogy legutóbb mikor történt ez meg és hogy legközelebb mikor fog ismét bekövetkezni Dzszenifer életében ez a csodálatos, születésnapi konstelláció?
7. Bizonyítsuk be, hogy bármely öt szomszédos pozitív egész szám között van olyan, amely a másik négyhez relatív prím.
8. Melyik az a legkisebb  $n$  pozitív egész szám, amire  $3 \nmid n$  és  $n$  osztóinak száma  $d(n) = 12$ ?
9. Hány olyan pozitív egész szám van, ami az  $n = 2^3 \cdot 7^5 \cdot 11^2$  és  $m = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$  számok közül legalább egyiknek osztója?
10. Legyen az  $n$  pozitív egész szám prímtényezősz felbontása  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ . Mennyi a  $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$  érték, vagyis hogyan számítható ki az  $n$  szám osztói reciprokanak az összege? (V '99)  
És hogyan lehet kiszámítani ezen reciprokok szorzatát?
11. Melyik az a legkisebb pozitív egész, aminek pozitív osztói száma 10-zel osztható?
12. Hány pozitív osztója van  $10!$ -nak? És  $n = \binom{12}{6}$ -nak? (pZH '15)
13. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $n$  szám 9-es osztási maradéka megegyezik a 10-es számrendszerben felírt alakjában szereplő számjegyei összegének 9-es maradékával.
14. Mi a 8-as oszthatósági szabály 9-es számrendszerben?
15. Igazoljuk, hogy tetszőleges 10-es számrendszerben felírt  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  szám 11-es osztási maradéka megegyezik az  $a_1 - a_2 + a_3 \dots \pm a_n$  szám 11-es maradékával.
16. Igazoljuk a 7-tel való oszthatóság ellenőrzésére szolgáló alábbi módszer helyességét. Az  $n$  szám pontosan akkor osztható 7-tel, ha 7-tel osztható az a szám, amit  $n$  tízes számrendszerbeli alakjából úgy kapunk, hogy az utolsó számjegy levágásával kapott számból levonjuk az utolsó számjegy kétszeresét. Pl. 2002 pontosan akkor osztható 7-tel, ha  $200 - 2 \cdot 2 = 196$  osztható 7-tel. Ez pedig igaz, hisz  $7 \mid 19 - 2 \cdot 6 = 7$ , tehát  $7 \mid 2002$ .
17. Oldogassunk lineáris kongruenciákat. Pl: (a)  $202x \equiv 157(203)$ , (b)  $309x \equiv 451(617)$   
(c)  $5x \equiv 13(137)$ , (d)  $113x \equiv 77(120)$ , (e)  $11x \equiv 12(18)$ ,  
(f)  $14x - 4 \equiv 80(21)$  (g)  $49^{49}x \equiv 3(15)$  (h)  $3^{80}x \equiv 23(100)$
18. Dzsúlió már régóta gyűjt nagy álmára, hogy volt barátnője, Vanessa mobiltelefonon őrzött arcképét a bicepszére tetováltassa. Legjobb barátja, Rodzser tanácsára, míg össze nem jön az ehhez szükséges 35000 forint, átváltja az ezer forintosokban tartott megtakarítását euróra, amit a Rodzser által ajánlott Rikárdótól (az ismeretségre tekintettel) szuperkedvezményes 330 Ft-os árfolyamon vesz meg. Miután Rikárdó centekkel nem foglalkozik, Dzsúliónak éppen 140 Ft marad a megtakarításából, amiből Rodzserrel közösen lottószelvényt vesznek azzal, hogy a nyereményt majd felezik. Hány euró boldog birtokosának mondhatja magát Dzsúlió a sikeres tranzakció után?
19. Ura születésnapjára Tűzvirág egy 77 gyönggyel díszített, mangalicabőr tokot varrt Vérbulcsú ivőtülkéhez. Annyira elégedett volt az eredménnyel, hogy Vérbulcsú hagyományörző dorombegyűttesének minden tagját is ugyanilyen tokkal lepte meg, hogy jól mutasson a csapat a tarsolylemezek mellett csüngő tülkökkel amikor fellépnek Dobogókőn a táltosünnep 50 személyes központi jurájában. Mivel a kínai boltban százasával árulják a gyöngyöket, 7 gyöngy kimarad, melyekkel Tűzvirág a hétköznapi pártját ékesítette. Hányan dorombolnak Vérbulcsú zenekarában? (ZH '15)