A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2016. 11. 24.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

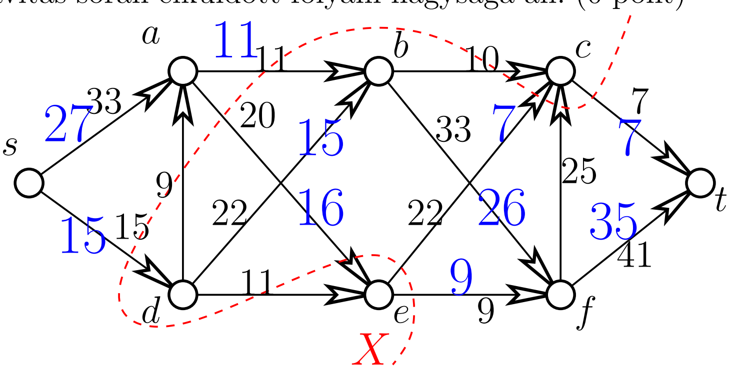
1. Tegyük fel, hogy a G gráfnak 100 pontja van, kromatikus száma $\chi(G) = 15$, és G-nek van 8 olyan pontja, amelyek egymással és G minden más pontjával össze vannak kötve. Mutassuk meg, hogy a G-beli független pontok maximális számára $\alpha(G) \geq 14$ teljesül.

   Tekintsük G csúcsainak egy $\chi(G) = 15$ színnel történő kiszínezését. Ebben a színezésben a 8 teljes fokú pont mindegyike egymástól és a többi csúcs színétől különböző színt kap. (3 pont)
   A maradék 92 pontot tehát $15 - 8 = 7$ színnel színeztük ki. (3 pont)
   E 7 színhez tartozó színosztályok között van tehát olyan, amely legalább $92/7 > 13$ színt tartalmaz. (3 pont)
   Ez a színosztály tehát egy legalább 14 pontú független ponthalmaz, így $\alpha(G) \geq 14$. (1 pont)

2. Mutassunk a bal oldali ábrán látható (G, s, t, c) hálózatban egy minimális kapacitású st-vágást.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (4 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (7), $sdeft$ (9), $sdbft$ (6) $sabft$ (4), $saedbft$ (9), $saecbft$ (7) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

   A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 nagyságú folyam, ezért tetszőleges st-vágás kapacitása legalább 42. Márpedig mi találtunk egy pontosan 42 kapacitású st-vágást. Ez azt mutatja, hogy az ábrán szaggatott vonallal jelzett st-vágás valóban minimális kapcitású. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágás, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

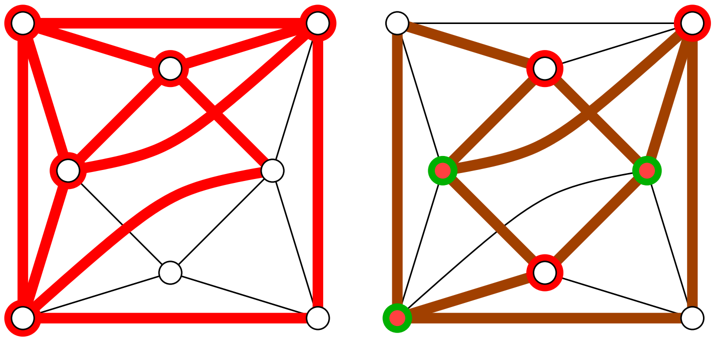
3. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ páros gráfnak 100 pontja van, és független pontjainak maximális száma $\alpha(G) = 50$. Igazoljuk, hogy G pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

   Mivel egy páros gráfban bizonyosan nincs hurokél, alkalmazhatjuk Gallai tételét, (1 pont)
   miszerint $100 = |V(G)| = \alpha(G) + \tau(G) = 50 + \tau(G)$, azaz $\tau(G) = 100 - 50 = 50$. (2 pont)
   Kőnig tétele szerint $\nu(G) = \tau(G)$ teljesül tetszőleges páros gráfban, így $\nu(G) = \tau(G) = 50$. (2 pont)
   Mivel G-nek 100 pontja van, ezért a $\nu(G) = 50$ azt jelenti, hogy G-nek van teljes párosítása. (2 pont)
   A Frobenius-tétel miatt ilyenkor bármely színosztály bármely X részhalmazára $|N(X)| \geq |X|$ teljesül, (2 pont)
   és a páros gráf struktúrájából adódóan ebből az is következik, hogy az $|N(X)| \geq |X|$ reláció a G gráf csúcsainak *tetszőleges* részhalmazára fennáll. (1 pont)

4. Síkbarajzolható-e a jobb oldali ábrán látható gráf?

   A kérdezett gráf nem síkbarajzolható. Ennek indoklásához a Kuratowski tétel miatt elegendő a megadott gráfnak olyan részgráfját találni, ami K_5 vagy $K_{3,3}$ soros bővítése. (3 pont)

Egy ilyen részgráf konkrét megadása fejezi be a bizonyítást. (7 pont)
(Az alábbi ábra két lehetséges részgráfot mutat.)



5. 100 villamosmérnök-hallgató jár SzA előadásra. Közülük azok a hallgatók, akiknek pzh-t kell írniuk, az előadás végén bedobnak fejenként 42 db egyforintost egy kalapba. Az így összegyűjtött pénzt a tankörvezető 128 forintonként rollnikba csomagolja, amiket majd kisorsolnak a diplomaosztón. Végül éppen 100 forint maradt rollnizatlan. Hány hallgatónak kell pzh-t írnia? (A feladatbeli szereplők kitalált személyek: bárminemű hasonlóság a valósággal puszta véletlen.)

Ha x hallgató köteles iv-zni, akkor érvényes a $42x \equiv 100(128)$ kongruencia. (2 pont)
2-vel osztáskor a modulust is osztva ekvivalens átalakítással $21x \equiv 50(64)$ adódik. (2 pont)
Mivel $(64, 3) = 1$, ezért a 3-mal szorzás ekvivalens átalakítás: $63x \equiv 150(64)$. (2 pont)
Innen $-x \equiv 22(64)$, azaz $x \equiv 42(64)$. (1 pont)
Figyelembevéve, hogy $0 \leq x \leq 100$, $x = 42$ adódik, (2 pont)
tehát a válasz 42. (1 pont)

Megoldható a feladat másképp is. Legyen y az elkészült rollnik száma. Ekkor $128y+100 = 42x$ alapján a $128y \equiv -100(42)$ lineáris kongruencia adódik. (2 pont)
Redukálás után kapjuk a $2y \equiv 26(42)$ kongruenciát, (2 pont)
amit 2-vel osztva a megoldás $y \equiv 13(21)$ lesz. (2 pont)
A kapott rollnik száma nem lehet több mint $42 \cdot 100/128 < 33$, (1 pont)
ezért csakis az $y = 13$ lehetséges, (1 pont)
ahonnan $128y + 100 = 42x$ alapján $x = 42$. (2 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy valamely G véges, egyszerű gráfban a lefogó ponthalmaz minimális méretére és a maximális klikkméretre $\tau(G) = \omega(G) - 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma $\chi(G) = \omega(G)$.

Az órán azt tanították, hogy $\chi(G) \geq \omega(G)$ teljesül minden véges, egyszerű G gráfban, (1 pont)
ezért elegendő a $\chi(G) \leq \omega(G)$ egyenlőtlenséget igazolni, (1 pont)
amihez nem kell más, mint azt megmutatni, hogy G csúcsai kiszínezhetők $\omega(G)$ színnel. (1 pont)
Mivel $\omega(G) = \tau(G)+1$, ezért elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges véges, egyszerű G gráf csúcsai $\tau(G) + 1$ színnel kiszínezhetők. (1 pont)
Tekintsünk egy minimális (azaz $\tau(G)$) méretű lefogó U ponthalmazt, és színezzük ki az U-beli pontokat csupa különböző színnel, majd adjunk a $V \setminus U$-beli pontoknak egy, az eddig felhasználtaktól különböző, közös színt. (3 pont)
Így G minden csúcsához rendeltünk színt, és ehhez $\tau(G) + 1$ színt használtunk fel. (1 pont)
Legyen e a G gráf egy éle és legyen u az e egy U-beli végpontja. Mivel az u-hoz használt színt semelyik más csúcshoz nem használtuk fel, ezért e két végpontja különböző színt kapott, (1 pont)
így meg tudtuk színezni G csúcsait $\tau(G) + 1$ színnel. Ezzel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)