A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2016. 12. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféle útvonalon tuduk eljutni a síkon $(0,0)$ koordinátájú pontból a $(9,10)$ koordinátájú pontba úgy, hogy az útvonal minden pontjának valamelyik koordinátája egész legyen, továbbá az út során sosem távolodhatunk a célponttól?
   (Nem kell kiszámítani a pontos eredményt: elég egy zárt formula, ami mutatja, hogy egy alapműveleteket ismerő számológéppel hogyan kapható ez meg.)

   Minden leszámlálandó útovonalnak megfelel egy olyan 19 hosszúságú sorozat, amely az egyes lépéseink sorrendjét írja le, azaz minden karakter vagy **j** vagy **f** és pontosan 9 db **j** és 10 db **f** karaktert tartalmaz. (2 pont)
   Különböző útvonalakhoz különböző sorozatok tartoznak, továbbá minden fenti tulajdonságú sorozat meghatároz egy leszámlálandó útvonalat. (2 pont)
   Ezért a leszámlálandó útvonalak száma pontosan annyi, mint a fenti tulajdonságú sorozatok száma. (2 pont)
   Az ilyen sorozatokat pedig úgy kaphatjuk meg, hogy tetszőlegesen megválasztjuk, hogy a 19 karakterből melyik 9 helyen vannak a **j** karakterek. (2 pont)
   Ezt pontosan $\binom{19}{9}$-féleképp tehetjük meg, ez tehát a válasz a feladat kérdésére. (2 pont)

2. Tegyük fel, hogy az F fának csak első-, másod- és harmadfokú csúcsai vannak, utóbbiból pontosan tíz darab. Határozzuk meg F leveleinek (azaz elsőfokú csúcsainak) a számát.

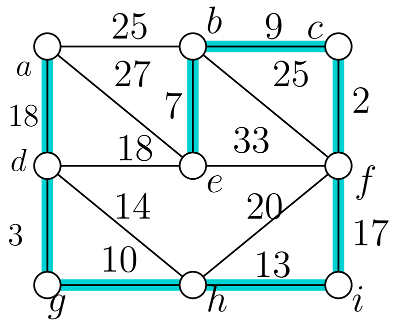
   Jelölje n_1, n_2 ill. n_3 rendre a levelek, másodfokú csúcsok és harmadfokú csúcsok számát. Ekkor F csúcsainak száma $n = n_1 + n_2 + n_3$ és a feltétel miatt $n_3 = 10$. (2 pont)
   Az F fa éleinek száma a tanultak szerint $|E(F)| = n - 1 = n_1 + n_2 + n_3 - 1$ (3 pont)
   Tanultuk, hogy véges gráf csúcsainak fokszámösszege éppen az élszám kétszerese, (3 pont)
   azaz $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 - 2$, ahonnan $n_1 = n_3 + 2 = 10 + 2 = 12$ adódik. A kérdésre a válasz tehát az, hogy F-nek pontosan 12 levele van. (2 pont)

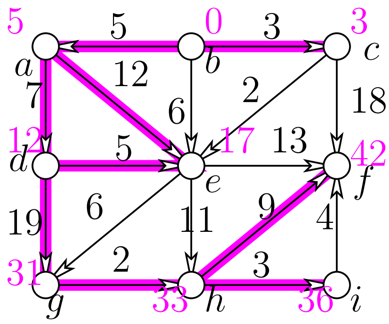
3. A bal oldali ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha e és h pontok közé egy új eh élt húzunk be, akkor ezen élnek milyen költséget adhatunk ahhoz, hogy eh benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális költségű feszítőfájában.

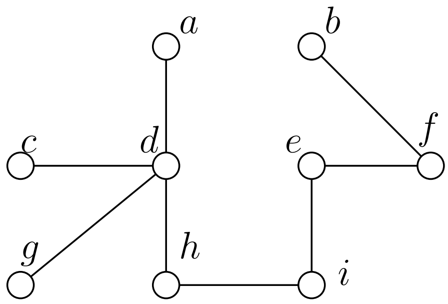
   Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével az élekről növekvő költség szerint eldöntjük, hogy bevesszük-e a feszítőfába. A bal oldali ábrán az ily módon kapott, minimális költségű F feszítőfa látható. (5 pont)
   Az eh él behúzása a feszítőfában létrehozza az $ebcfih$ kört. Ezen a körön a 17 költségű fi él a legdrágább. (1 pont)
   Ha tehát eh költsége legfeljebb 17, akkor F-ből törölve fi-t és bevéve eh-t egy F-nél nem drágább feszítőfát kapunk, ezért ebben az esetben az eh él benne lehet minimális költségű feszítőfában. (1 pont)
   Ha azonban eh költsége 17-nél több, akkor bárhogyan is veszünk egy, az eh élt tartalmazó feszítőfát, ha ebből töröljük eh-t, akkor az $ebcfih$ út valamely x éle az így keletkező két komponenst köti össze. Ezért ha eh-t x-re cseréljük, akkor egy olcsóbb feszítőfát kapunk, (1 pont)
   így G-nek semelyik eh-t tartalmazó feszítőfája nem lehetett minimális költségű. (1 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát az, hogy az eh élköltsége legfeljebb 17 lehet. (1 pont)

4. Határozzuk meg a középső ábrán látható PERT problémában a kritikus tevékenységeket.

Elsőként meghatározzuk PERT gráf pontjainak egy topologikus sorrendjét (pl. források megtalálásával és törlésével). Megkapjuk pl az $b, a, c, d, e, g, h, i, f$ sorrendet. (2 pont)
Ebben a sorrendben meghatározzuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét, és az azt meghatározó, az adott csúcsba futó élt (éleket) megjelöljük. (Az ábrán vastagítással ill. a csúcsok melletti számokkal.) (5 pont)
Ezutan meghatározzuk a kritikus tevékenységeket, azaz mindazon tevékenységeket, melyek kritikus úton vannak. (1 pont)
Kritikus út jelen esetben az olyan irányított bf-út, amely megjelölt élekből áll. (1 pont)
Egyetlen kritikus út van, mégpedig a $badghf$, ezért a kritikus tevékenységek kizárólag ezen út pontjai, azaz b, a, d, g, h, f. (1 pont)
A PERT problémában a legrövidebb végrehajtási idő egyébként 42. (0 pont)







5. Tegyük fel, hogy a 10 csúcsú, egyszerű G gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre $3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek nincs Hamilton-köre.

A 3 db 9-edfokú csúcs G minden más csúcsával és egymással is szomszédos. (2 pont)
Ezért ha elhagyjuk ezt a három csúcsot, akkor az így kapott gráfban a fokszámok $0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$ lesznek. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy három izolált pont mellett még 4 db negyedfokú pontot kapunk, azaz a törlés után megmaradó gráfnak legalább 4 komponense lesz. (3 pont)
A Hamilton-kör létezésének tanult szükséges feltétele szerint k pont elhagyásakor egy Hamilton-körrel rendelkező gráf legfeljebb k komponensre eshet szét. Ez a feltétel a megadott G gráfban nem teljesül, tehát G-nek nincs Hamilton-köre. (3 pont)
Mivel a fenti 3 csúcs törlése után legalább 5 komponens keletkezik, G-nek Hamilton-útja sincs. (0 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a jobb oldali ábrán látható F fa a G gráfnak egyszerre az h-gyökerű BFS fája és a d-gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

Az órán azt tanították, hogy irányítatlan gráfban a DFS bejárás után nem lesz keresztél, (2 pont)
és az is szerepelt, hogy a BFS fának csak olyan csúcsai között futhatnak G élei, melyek gyökértől mért távolsága legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. (2 pont)
Tehát G minden, a megadott fában nem szereplő éle a d gyökérből nézve leszármazottakat köt össze, míg a h gyökérből nézve keresztélnek kell lennie. (2 pont)
Ebből az következik, hogy csak olyan éle lehet G-nek a megadottakon kívül, amely d-ből indul, (1 pont)
továbbá (mivel d a h-tól 1 távolságra van), az él másik végpontja h-tól a fában $0, 1$ vagy 2 távolságra lehet. (1 pont)
Az d további szomszédai tehát csakis i és e lehetnek, ráadásul mindkettő valóban lehet is szomszéd, hisz mind a DFS, mind a BFS meg tudja találni F-et, ha ezen élek jelenlétében futtatjuk a megfelelő gyökérből. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-nek az F élein túl legfeljebb két további éle lehet, ami összesen 10 él. Ez a válasz tehát a feladat kérdésére. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2016. 12. 05.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

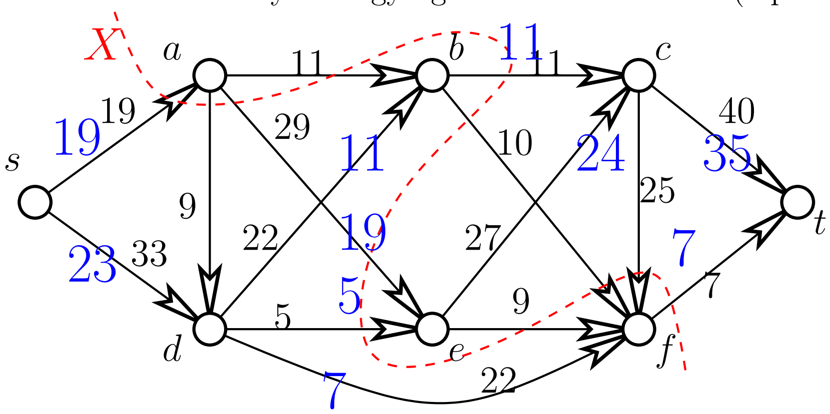
1. Tegyük fel, hogy G egy 100 pontú, egyszerű gráf, melynek komplementerében a maximális klikkméret $\omega(\overline{G}) = 10$, és G egy v pontjának foka pedig $d(v) = 92$. Mutassuk meg, hogy a G kromatikus számára fennáll a $\chi(G) \geq 11$ egyenlőtlenség.

   Mivel $\alpha(G) = \omega(\overline{G}) = 10$, (1 pont)
   ezért G bármely színezése olyan, hogy abban egyetlen színosztály mérete sem lehet 10-nél nagyobb. (3 pont)
   Ráádásul a v-t tartalmazó színosztály csakis olyan pontokat tartalmazhat, amelyekkel v nincs összekötve. Márpedig ilyen pontból (v-t is beleértve) összesen $100 - d(v) = 8$ db van. (2 pont)
   Ha tehát elhagyjuk a v csúcs színosztályát, legalább 92 pont marad, amelyeknek a lefedéséhez legalább $\frac{92}{10} > 9$ színosztály szükséges. (2 pont)
   Azt kaptuk, hogy bármely színezésnek van legalább 10 olyan színosztálya, amely v-t nem tartalmazza, tehát G pontjainak kiszínezésére 10 szín nem elegendő, így $\chi(G) \geq 11$ adódik a kromatikus számra. Nekünk pedig pontosan ezt kellett megmutatnunk. (2 pont)

2. Találjunk a bal oldali ábrán látható (G, s, t, c) hálózatban egy maximális nagyságú st-folyamot.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 42 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (kékkel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (7 pont)
   A folyamot egyébként úgy kaptuk, hogy sorra az $sabct$ (11), $sdft$ (7), $sdect$ (5) $saect$ (8), $sdbaect$ (11) utakon javítottunk, zárójelben a javítás során elküldött folyam nagysága áll. (0 pont)

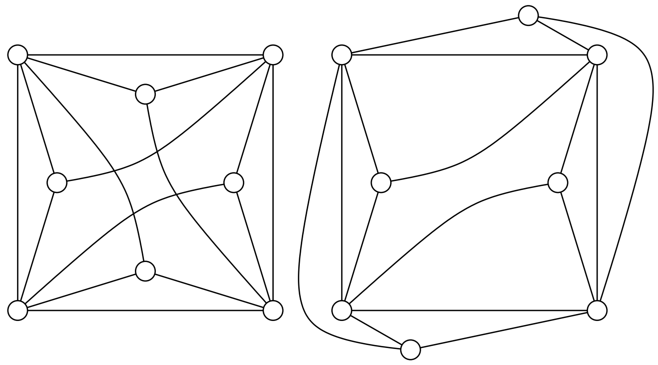
   A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 42 kapacitású. (2 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 42 kapacitású st-vágás, ezért tetszőleges st-folyam nagysága legfeljebb 42. Márpedig mi találtunk egy pontosan 42 nagyságú st-folyamot. Ez azt mutatja, hogy az ábrán megadott st-folyam valóban maximális nagyságú. (1 pont)



   A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágás, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik. Ha azonban nincs semmiféle indoklás arra vonatkozóan, honnan származik a folyam (és a vágás), és a megadott f nem maximális folyam (esetleg nem is folyam), úgy legfeljebb az a 2 pont járhat, ami az optimalitási feltétel ellenőrzésével történő indoklását értékeli.

3. Síkbarajzolható-e a jobb oldali ábrán látható G gráf?

   Igen, síkbarajzolható. Ennek bizonyítására elegendő egy konkrét síkbarajzolást mutatni. (2 pont)
   Egy ilyen látható a jobb oldali ábrán. (8 pont)



4. Festéktüsszentő Hapci Benő és Madárvédő Golyókapkodó egyaránt január 1-jén születtek: Festéktüsszentő 2013-ban, Madárvédő pedig 1991-ben. Hány éves Festéktüsszentő akkor, amikor életkora utoljára osztója Marárvédő életkorának és egyúttal az aktuális évszámnak is?

Legyen x a kérdezett életkor. Amikor a szóban forgó konstelláció bekövetkezik, az aktuális évszám $2013 + x$, Madárvédő életkora pedig $x + 22$. (2 pont)
A legnagyobb olyan x egészet keressük tehát, amelyre $x \mid 2013 + x$ és $x \mid x + 22$ egyaránt teljesül. (2 pont)
Az első oszthatóság ekvivalens azzal, hogy $x \mid 2013$, a második pedig azzal, hogy $x \mid 22$. (1 pont)
Ezek szerint a célunk 2013 és 22 legnagyobb közös osztójának meghatározása. (2 pont)
Szerencsére tanultuk az Euklideszi algoritmust, így ezzel határozzuk meg a választ, mégpedig úgy, hogy minden lépésben a két szám közül a nagyobbikat a kisebbikkel történő osztási maradékra cseréljük: $(2013, 22) = (22, 11) = (11, 0) = 11$, (3 pont)
tehát a kérdésre a válasz az $x = 11$. (1 pont)

Természetesen a kanonikus alakokból is meghatározható a legnagyobb közös osztó.

5. Mely x egészekre áll fenn a $42x \equiv 33(51)$ kongruencia?

Az $ax \equiv b(m)$ kongruencia megoldhatóságának tanult szükséges és elégséges feltétele az, hogy $(a, m) \mid b$ teljesüljön. (1 pont)
Ez teljesül, hiszen $3 = (42, 51) \mid 33$. Nosza, le is osztunk 3-mal: $14x \equiv 11(17)$. (2 pont)
A 3-mal szorzás ekvivalens átalakítás, mivel $(3, 17) = 1$. Ezt kapjuk: $42x \equiv 33(17)$. Innen $mod 17$ redukálás után $-9x \equiv 33(17)$ adódik, amit ügyesen leoszthatunk 3-mal: $-3x \equiv 11(17)$. Egy -1-gyel szorzás után $3x \equiv -11(17)$, ahonnan $3x \equiv 6(17)$ következik. Megint oszthatunk 3-mal: $x \equiv 2(17)$. (6 pont)
Tekintettel arra, hogy végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, a feladat kérdésére a válasz azon x-ek halmaza, melyekre $x \equiv 2(17)$ teljesül. (1 pont)
Ez pedig az eredeti modulis szerint az $x \equiv 2(51)$, $x \equiv 19(51)$ vagy $x \equiv 36(51)$ kongruenciák valamelyikének teljesülésével ekvivalens. (0 pont)

Természetesen más módszerrel is megoldható a feladat, és a hibátlan megoldás 10 pontot ér. Az is kifogástalan megoldás, ha nem ellenőrizzük az elején a megoldhatóságot, mert hisz annak a levezetésből is adódnia kell.

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ páros gráfnak 100 pontja van, és független pontjainak maximális száma $\alpha(G) = 55$. Igazoljuk, hogy G pontjainak valamely X részhalmazára $|N(X)| < |X|$ teljesül.

Gallai tétele szerint, ha egy G gráfban nincs hurokél, akkor $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. Mivel G páros, ezért nincs benne hurokél, így $\tau(G) = |V(G)| - \alpha(G) = 100 - 55 = 45$. (3 pont)
A páros gráfokra érvényes Kőnig tétel szerint $\nu(G) = \tau(G) = 45$. (3 pont)
Tehát a G egyik színosztálya nem fedhető párosítással. (1 pont)
Ekkor a Hall tétel szerint ebben a színosztályban van olyan X ponthalmaz, amelyre $|N(X)| < |X|$ teljesül, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (3 pont)

Megesik, hogy nem jó feladatot tűzünk ki. Most is így történt. Szerencsére az állítás igaz és a hivatalos megoldás is helyes. Ettől még triviális az állítás, ahogy erre Nguyen Hai rámutatott. Tehát.

Legyen X a G egy 55 pontú független ponthalmaza. Mivel az X-beli csúcsok egyikének sincs X-beli szomszédja, ezért $N(X) \subseteq V(G) \setminus X$, (8 pont)
azaz $|N(X)| \leq |V(G) \setminus X| = 100 - 55 = 45 < 55 = |X|$. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)