A számítástudomány alapjai 2016. I. félév

9. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független* ha U nem feszít élt, *lefogó* tulajdonságú, ha U *lefogja* G minden élét, azaz G minden élének van U-beli végpontja. A G éleinek F részhalmaza *független*, ha végpontjaik különbözők, végül F *lefogó élhalmaz* ha $V(F) = V(G)$.
$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Megfigyelés: Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráfra (1) $\nu(G) \leq \frac{1}{2}|V|$, (2) $\nu(G) \leq \tau(G)$, valamint (3) ha G-nek nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) \leq \rho(G)$. Továbbá (4) $U \subseteq V$ pontosan akkor független, ha $V \setminus U$ lefogó ponthalmaz. Végül: ha G egyszerű, akkor (5) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Gallai tételei: Tetszőleges véges, n pontú G gráfra (1) $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ha G hurokélmentes, és (2) $\nu(G) + \rho(G) = n$ ha G-ben nincs izolált pont.

Kőnig tétele: Ha G véges páros gráf és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

Táblázatba sűrített tudomány

$\alpha \leq \rho$	max ftn	min lef	ps gráfra $\nu = \tau$ (Kőnig)
pont	α	τ	$\nexists$ hurokél: $\alpha + \tau = n$ (Gallai 1)
él	ν	ρ	$\nexists$ iz. pont: $\nu + \rho = n$ (Gallai 2)
$\nu \leq \tau \leq 2\nu$			ps gráfra ($\nexists$ iz. pont) $\alpha = \rho$ (Kőnig)

Def: A G gráf *síkbarajzolható*, ha létezik G-nek olyan diagramja, amiben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. A síkbarajzolás a síkot *tartományokra (lapokra)* osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartomány nincs.

Tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Köv.: Tetszőleges konvex poliéder élhálója síkbarajzolható.

Hasznos összefüggés Ha egy G síkbarajzolt gráfnak e éle van, és az egyes tartományait $l_1, l_2, \ldots$ él határolja, akkor $2e = \sum_i l_i$. (Ha egy uv él mindkét oldalán ugyanaz a t_i tartomány fekszik, akkor uv-t kétszer számoljuk l_i-be.)

Tétel: Ha G sr, n csúcsa, e éle, k komponense és t tartománya van, akkor $n + t = e + k + 1$.

Köv.: Ha G sr, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.

(**Euler-formula**) Ha egy öf sr gráfnak n pontja, e éle és t tartománya van, akkor $n + t = e + 2$.

Köv.: Ha G egyszerű, legalább 3-pontú, sr gráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G-nek háromszöglapja sincs, akkor még $e \leq 2n - 4$ is igaz.

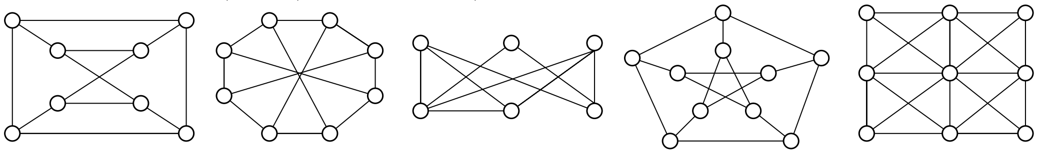
Köv.: Ha G sr és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

Köv.: Sem K_5, sem $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg a C_n kör, a K_n teljes gráf ill. a $K_{n,n}$ teljes páros gráf α, τ, ν ill. ρ paramétereit. (Természetesen n függvényében.)
2. Az F élhalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk F-ről? Az U ponthalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk G-ről és U-ról?
3. A G gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$.
4. Mutassuk meg, hogy ha a 110 pontú G gráfnak van 73 élből álló lefogó élhalmaza, akkor G-nek van 37 élű párosítása.
5. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 2001\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $i + j$ szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
6. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 74\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
7. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \ldots, 74\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $0 < |i - j| \leq 2$. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.

8. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 99 pontja van, független pontjainak maximális száma $\alpha(G) = 15$, ám van G-nek egy olyan v csúcsa, hogy a legnagyobb v-t tartalmazó G-beli független ponthalmaz mérete 8. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \geq 8$ teljesül G kromatikus számára.
9. Mutassuk meg, hogy $\max\{\frac{\tau(G)}{\nu(G)} : G \text{ véges, egyszerű gráf}\} = 2$.
10. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráf egy lefogó élhalmaza független élekből áll. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét, azaz a G-t lefogó pontok minimális számát. (ZH'14)
11. Mutassuk meg, hogy a K_5, K_6, K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G-be behúzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
12. Ha G $n \geq 3$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
    (a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
    (b) ha G-nek $3n - 6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
    (c) G-nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja. (ZH '01)
13. Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?
14. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
15. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
16. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok? Hát az alábbiak?



17. Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a $\overline{G}$ komplementere nem síkbarajzolható?(V '01)
18. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
19. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak!
20. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. Mutassuk meg, hogy K_{10} lerajzolásakor legalább 42 élmetszéspontot kapunk.
21. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
22. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és $\overline{G}$ közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
23. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
24. Legfeljebb hány éle és hány tartománya lehet egy olyan egyszerű, n pontú, sr G gráfnak, aminek van olyan lapja, ami G minden csúcsát tartalmazza a határán?
25. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot, melynek pontjai a gyanús cégeknek felelnek meg és G két csúcsa között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G-t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket? (ZH '14)
26. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú. (pZH '14)