

A számítástudomány alapjai 2016. I. félév

8. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Edmonds-Karp tétel: Ha a javító utas algoritmusban mindig egy lehető legkevesebb élből álló javító út mentén javítunk, akkor legfeljebb nm javítás kell a maximális folyam megtalálásához, ahol n a hálózat csúcsainak, m pedig az éleinek száma.

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a c kapacitásfüggvény minden élen egész értéket vesz fel, akkor a maximális nagyságú folyamok közt létezik olyan f folyam, ami minden élen egész értéket vesz fel (azaz ha a c kapacitás egész, akkor létezik *egészfolyam* a maximális folyamok között).

Def: A $G(V, E)$ gráfban éleinek F részhalma (más *független* szóval *párosítás*), ha F élei diszjunktak, azaz G bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És F -ben hurokélek sincsenek.) A G -beli független élek maximális számát $\nu(G) := \{|F| : F \text{ a } G \text{ párosítása}\}$ jelöli, tehát $\nu(G) = k$, ha G -nek van k páronként diszjunkt éle, de $k + 1$ nincs. A G gráf egy *teljes párosítása* alatt a G olyan F párosítását értjük, amely G minden pontját *fedti*, azaz V minden pontjából indul F -nek éle.

Def: A G gráf csúcsainak U részhalma *lefogó* tulajdonságú, ha U *lefogja* G minden élet, azaz G minden élének van U -beli végpontja, más szóval $G - U$ üres gráf. A G minimális méretű lefogó ponthalmazának mérete $\tau(G) = k$ ha van k méretű lefogó ponthalmaz G -ben, de $k - 1$ méretű nincs.

Megfigyelés: Tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Def: Ha $G = (V, E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X, vx \in E\}$ az X ponthalmaz G -beli szomszédsága.

Hall tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G -nek A -t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Frobenius tétele: Tfh G páros, színosztályai A és B . Ekkor G -nek pontosan akkor van teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és $|X| \leq |N(X)|$ teljesül tetszőleges $X \subseteq A$ részalmazra.

König tétel: Ha G véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

Alternáló utas algoritmus:

Input: $G = (A, B; E)$ ps gráf.

Output: M maximális párosítás.

Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és javító utat keresünk. Ez olyan ún. alternáló út, aminek felváltva M -beliek és M -en kívüliek az élei és A egy fedetlen pontjából B fedetlen pontjába. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy M éleit B -ből A -ba, G többi élet pedig A -ból B -be irányítjuk, majd BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen út, akkor az egy javító út. Ha találtunk ilyet, akkor az út M -beli éleit kidobjuk M -ból, az M -en kívülieket pedig bevesszük M -be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz. Ezt követően újabb javító utat keresünk. Ha már nincs javító út, akkor az aktuális M párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Az A -beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető B -beli csúcsokkal és az M által fedett, A -beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető A -beli csúcsok egy $\nu(G)$ méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

Gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-reguláris páros gráfban (tehát amiben minden foksám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges G gráfra $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n -csúcsú, egyszerű G gráfra $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ teljesül.
4. Tfh G egyszerű, $|V(G)| = 2000$ és $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G -ben nincs teljes párosítás!
5. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6.
6. Gyakoroljuk az alternáló utas algoritmust kis gráfokon. Magyarázzuk meg, mi köze az alternáló utas algoritmusnak a növelő utas algoritmushoz.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $G = (V, E)$ (nem feltétlenül páros) gráfban az M párosítás nem maximális (azaz $|M| < \nu(G)$), akkor van M -hez javító út, azaz olyan alternáló út, amely M által fedetlen pontokat köt össze.

8. Tegyük fel, hogy a G páros gráf k -reguláris, azaz minden csúcsának a fokszáma k valamely $k \geq 1$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy G -nek van teljes párosítása. Igazoljuk azt is, hogy G élei úgy színezhetők ki k szín felhasználásával, hogy minden csúcsra igaz, hogy az onnan induló élek különböző színűek.
9. Egy $n \times n$ méretű táblázat néhány mezejét zöldre festették úgy, hogy bárhogyan is választunk ki k sort, az azokban található zöld mezők legalább k oszlophoz tartoznak. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható n zöld mező úgy, hogy azokra bástyákat állítva a bástyák közül semelyik kettő sem üti egymást.
10. Adott egy G páros gráf (A és B színsztályokkal) és G minden v csúcsához egy $b(v)$ pozitív egész szám. Az a cél, hogy G -nek a lehető legtöbb élét válasszuk ki úgy, hogy minden v csúcs legfeljebb $b(v)$ kiválasztott élnek legyen végpontja. Adjunk hatékony algoritmust ennek a problémának a megoldására. (A feladatban körülírt élhalmazt b -párosításnak is szokás hívni. A $b \equiv 1$ eset épp a párosítást definiálja.)
11. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
12. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színsztálya 28, a B színsztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színsztálynak valamely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színsztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$. (ZH '14)
13. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G -re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színsztály minden X részhalmaza esetén. (pZH '14)
14. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf mindkét színsztálya egyenként 99 pontot tartalmaz, az A színsztályban minden pont foka legalább 66, B -ben pedig legalább 33. Mutassuk meg, hogy G -nek van teljes párosítása. (ZH '15)
15. Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egyszerű, páros gráf A színsztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A -ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G -nek van A -t fedő párosítása. (pZH '15)