A számítástudomány alapjai 2016. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G gráf H részgráfja a G *feszítőfája*, ha $V(H) = V(G)$ és H fa.

Állítás: Tetsz. G gráfnak pontosan akkor van feszítőfája, ha G összefüggő.

Def: Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges G' részgráfjának *költsége* a $E(G')$ élhalmazbeli élek költségeinek összege.

Kruskal algoritmus: Input: $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Output: $F = F_m$ a G egy minimális költségű feszítőfája.

Működés: Legyen $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, és $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és
$$F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{e_i\} & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_i & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

Tétel: A Kruskal algoritmus által kiszámított $F = F_m$ élhalmaz a G egy min ktgű feszítőfája.

Def: A $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf egy *bejárásán* a V-beli csúcsok végiglátogatását értjük, ahol a alábbiak szerint. A csúcsok állapota kezdetben *eléretlen*, idővel *elértté* válik, a bejárás végére pedig *befejezett* lesz (mégpedig akkor, amikor észrevesszük, hogy onnan már nem tudunk újabb csúcsot elérni). A fő szabály, hogy az újonnan elért csúcsot –ha lehetséges– mindig már korábban elért csúcsból induló él mentén elérni. Ha ez nem lehetséges, de még van eléretlen csúcs, akkor tetszőleges eléretlen csúcs lehet a következőnek elért csúcs. (Irányítatlan gráf esetén minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.) A bejárás során kialakul a csúcsok egy elérési ill. egy befejezési sorrendje, továbbá minden csúcshoz feljegyezzük azt is, hogy melyik él mentén értük el. Ez utóbbi élek az ún. *faélek*, és a bejárás *fáját* alkotják (ami egyrészt lehet irányított, másrészt pedig erdő).

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy r gyökércsúcs. Az ouptut egy r-ből induló bejáráshoz tartozó ún. *szélességi fa* (a bejárás fája) és egy elérési sorrend. A bejárás az fenti szabály azon kiegészítésével történik, hogy a következőnek elért csúcsot mindig a lehető legkorábban elért csúcsból kell elérnünk. (Ezért a BFS bejáráshoz tartozó elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel.)

Tétel: A BFS bejárás fája az r csúcsból minden más csúcsba a G gráf egylegrövidebb (legkevesebb élből álló) legrövidebb útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G-beli távolsága r-től megegyezik az r gyökerű szélességi fán mért távolsággal.

Tétel: A szélességi bejárás lépésszáma legfejlebb $konst \cdot (n+m)$, ahol n a G csúcsainak, m pedig G éleinek száma.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza. $dist(u, v)$ jelöli az (ir) uv utak közül a legrövidebb hosszát.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf, $u \in V$ és egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Tegyük fel, hogy $d(v) \ge dist(u, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az *$e = vw$ él menti javítás* azt jelenti, hogy a $d(w)$ értéket a $\min\{d(w), d(v) + l(vw)\}$ értékkel helyettesítjük. (Ha minden élhossz nemnegatív, akkor $d(w) \ge dist(u, w)$ az él menti javítás után is teljesülni fog.)

Dijkstra algoritmus

Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $l : E \to \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $r \in V$ gyökér.
Output: $dist(r, v)$ minden $v \in V$-re és egy „legrövidebb utak fája".
Működés: Kezdetben $U_0 := \emptyset$, $d(r) = 0$ és $v \ne r$ esetén $d(v) = \infty$.
Az algoritmus i-dik fázisában ($i = 1, 2, \ldots$) a következő történik.
1. A legyen u_i az a v csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $d(v)$ minimális és legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$.
2. Végezzünk él menti javításokat minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen.
3. $i := i + 1$

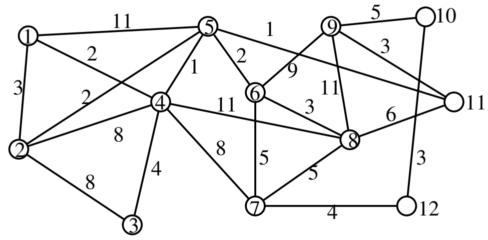
Ha $|V| = n$, akkor az n-dik fázis után $dist(r, v) = d(v)$ teljesül minden $v \in V$-re.

Tétel: A Dijkstra algoritmus helyesen működik. Minden fázis legfeljebb n javításból és egy minimumkiválasztásból áll (ami legfeljebb $konst \cdot n$ lépés), ezért a Dijkstra algoritmus lépésszáma legfeljebb $konst \cdot n^2$.

Megjegyzés: Ha minden v csúcsnál azt is nyilvántartjuk, melyik él menti javítás állította be a $d(v)$ értéket, akkor az így megjelölt élek a BFS-hez hasonló legrövidebb utak fáját alkotják.

Gyakorlatok

1. Hány feszítőfája van annak a gráfnak, amelynek csúcsai u_1, u_2 ill. $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és élei az összes lehetséges $u_i v_j$ párok, ahol $i = 1, 2$ ill. $j = 1, 2, \ldots, n$?
2. Keressünk az alábbi gráfban minimális költségű feszítőfát! Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak?



3. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.
4. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
6. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
7. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)
8. Rajzoljunk gráfot, és keressük meg egy csúcsból kiindulva a BFS fáját. Megfelelő élhosszok megadásával gyakoroljuk a Dijkstra algoritmust.
9. Törpfalván kitört a járvány: csúf kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van. Legfeljebb hány napig tarthat a járvány akkor, ha a törpök időközben újabb ismeretséget is köthetnek?
10. Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
11. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat, amiben minden mezőben egy 0 vagy egy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan vonalat, amire az igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni?
12. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?
13. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, valamint egy r gyökérpont. Egyetlen Dijkstra algoritmus lefuttatása segítségével találjuk meg G mindazon e éleit, amelyekre igaz az, hogy önmagában attól, hogy e hosszát eggyel csökkentjük egytelen csúcs r-től mért távolsága sem csökken.