A számítástudomány alapjai 2016. I. félév

10. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: A H gráf a G gráf *soros bővítése*, ha H megkapható G-ből úgy, hogy G bizonyos éleit olyan utakkal helyettesítjük, amelyeknek belső csúcsai különböznek egymástól és G csúcsaitól.

Kuratowski tétel: A G gráf pontosan akkor sr, ha részgráfként nem tartalmazza sem $K_{3,3}$, sem K_5 soros bővítését.

Def: Legyen $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf, legyen V^* a G lapjainak halmaza. $G^* = (V^*, E^*)$ a G *duálisa*, ahol $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e-t határoló tartomány(oka)t összekötő él.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz *vágás*, ha Q egy olyan élhalmaz, hogy egyrészt Q elhagyásakor G szétesik (azaz komponenseinek száma megnő), másrészt Q egy legszűkebb élhalmaz ezzel a tulajdonsággal, azaz Q semelyik valódi részhalmazának elhagyásától sem esik G szét. Az e él *elvágó él*, ha $\{e\}$ vágás. A G gráf e és e' élei *soros élek*, ha $\{e, e'\}$ vágás.

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ sr. (1) Ha G^* a G duálisa, akkor G^* sr és öf.
(2) $f(e) := e^*$ egy $f : E(G) \to E(G^*)$ természetes bijekciót definiál.
(3) G lapjai bijektíven G^* pontjainak felelnek meg.
(4) $C \subseteq E(G)$ a G köre (vágása) $\iff$ $f(C)$ G^* vágása (köre).
(5) $e \in E(G)$ a G hurokéle (elvágó éle) $\iff$ $f(e)$ a G^* elvágó éle (hurokéle).
(6) $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff$ $f(e), f(e')$ soros (párhuzamos) élek.
(7) Ha G öf, akkor $G = (G^*)^*$, és ekkor G pontjai bijektíven G^* lapjainak felelnek meg.

Ötszíntétel: Ha G síkbarajzolható, akkor $\chi(G) \leq 5$. **Négyszíntétel:** Ugyanez, 4-gyel.

Def: Ha $a, b, k \in \mathbb{Z}$ és $b = k \cdot a$, akkor *a osztója b-nek* (*b többszöröse a-nak*), jelölése $a \mid b$.

Def: A $p \in \mathbb{Z}$, $|p| > 1$ szám *felbonthatatlan*, ha csak $1 \cdot p, p \cdot 1, (-1) \cdot (-p)$ és $(-p) \cdot (-1)$ alakban áll elő egészek szorzataként. (Azaz, ha $a \mid p$ és $1 < |a|$, akkor $|a| = |p|$.) A $z \in \mathbb{Z}$ *összetett*, ha $|z| > 1$ és z nem felbonthatatlan. A $p \in \mathbb{Z}$, $|p| > 1$ szám *prím*, ha $p \mid ab$, $\ a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \mid a$ vagy $p \mid b$. (Egészek szorzatát csak úgy oszthatja, ha valamelyik tényezőt osztja.)

Állítás: Tetszőleges 1-nél nagyobb egész szám előáll felbonthatatlan számok szorzataként.

A számelmélet alaptétele: Tetszőleges n egész (melyre $2 \leq |n|$) a tényezők sorrendjétől és esetleges (-1) tényezőktől eltekintve egyértelműen áll elő felbonthatatlan számok szorzataként.

Köv.: Egy p egész szám pontosan akkor felbonthatatlan, ha prím.

Def: Az n *kanonikus alakja* $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, ahol a p_i-k prímek, és $1 \leq \alpha_i \in \mathbb{N}\ \forall i$.

Állítás: Egy $d > 0$ egész pontosan akkor osztója n-nek, ha d kan. alakjában csak n prímosztói szerepelnek, legf az n kan. alakjában szereplő kitevőn. ($n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \Rightarrow d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.)

Köv.: Ha $1 < n$ kan. alakja $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, akkor n poz. osztóinak száma $d(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$.

Def: Az a és b számok *legnagyobb közös osztója* az a és b közös osztói közül a legnagyobb: $(a, b) := \max\{d : d \mid a, d \mid b\}$, *legkisebb közös többszörösük* pedig az a és b pozitív közös többszörösei közül a legkisebb: $[a, b] := \min\{0 < d : a \mid d, b \mid d\}$. Az a és b egészek *relatív prímek*, ha $(a, b) = 1$, azaz nincs közös prímosztójuk (a kanonikus alakjaikban szereplő prímkek különbözők).

Állítás: Ha $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ és $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ ($\alpha_i = 0$ és $\beta_i = 0$ is lehet), akkor $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}, [a, b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$, valamint $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. (Azaz a lnko-t a és b prímosztóit a kisebb hatványon, a lkkt-t pedig ugyanezen prímosztókat a nagyobb hatványon összeszorozva kapjuk meg.)

Köv.: Ha $d \mid a$ és $d \mid b$ közös osztó, akkor $d \mid (a, b)$.

Gyakorlatok

1. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem duálisa a duálisának.
2. Tfh G öf, sr, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?
3. Igazoljuk, hogy ha G n pontú sr gráf, és G izomorf G^*-gal, akkor G-nek $2n - 2$ éle van! Tetszőleges $n > 3$-ra mutassunk példát ilyen G-re!
4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkbarajzolt, öf G gráf tartományai pontosan akkor színezhetők kis két színnel sakktáblaszerűen (azaz G^* pontosan akkor páros gráf), ha G-nek létezik Euler körsétája.

5. Tfh G olyan legalább 4 csúcsú egyszerű sr gráf, amibe nem húzható újabb él az egyszerű sr tulajdonság megtartásával. Igazoljuk, hogy G^* 3-reguláris!
6. Bizonyítsuk be, hogy ha a G sr gráfnak van Hamilton-köre, akkor a tartományai 4 színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek!
7. Melyek p prímre lesz (a) $p + 10$ és $p + 14$ prím? (b) $p^2 + 2$ prím? (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ prím?
8. Igazoljuk, hogy bármely hat egymást követő egész szám szorzata osztható 720-szal.
9. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész egyértelműen írható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol k és l pozitív egészek, továbbá l egyetlen négyzetszám osztója az 1.
10. Öröm és boldogság: ma van Dzsenifer születésnapja. Ezért matek és földrajz helyett Britnivel, a barátnőjével plázába mentek okostelefont nézni. Kipróbálták a legújabb, facebookon agyonlájkolt, minden eddiginél okosabb születésnapi appot és megállapították, hogy Dzsenifernek feltétlenül vennie kell egy rózsaszín szelfibotot a jóképű eladótól, ugyanis ma (2015-ben) az életkora osztója az aktuális évszámnak. Márpedig az app szerint ilyenkor különösen sok szerencse éri a horoszkópokban kellőképpen jártas beavatottakat. Meg tudjuk-e mondani a fizetős appra történő regisztráció nélkül, hogy legutóbb mikor történt ez meg és hogy legközelebb mikor fog ismét bekövetkezni Dzsenifer életében ez a csodálatos, születésnapi konstelláció?
11. Bizonyítsuk be, hogy bármely öt szomszédos pozítív egész szám között van olyan, amely a másik négyhez relatív prím.
12. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amire $3 \nmid n$ és n osztóinak száma $d(n) = 12$?
13. Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fönn minden pozitív egészekbol álló szám k-asra, ha $k = 2$. (ZH '02)
14. Hány olyan pozitív egész szám van, ami az $n = 2^3 \cdot 7^5 \cdot 11^2$ és $m = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$ számok közül legalább egynek osztója?
15. Legyen az n pozitív egész szám prímtényezős felbontása $n = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Mennyi a $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$ érték, vagyis hogyan számítható ki az n szám osztói reciprokának az összege? (V '99)

    És hogyan lehet kiszámítani ezen reciprokok szorzatát?
16. Melyik az a legkisebb pozitív egész, aminek pozitív osztói száma 10-zel osztható?
17. Hány pozitív osztója van 10!-nak?
18. Határozzuk meg az $n = \binom{12}{6}$ pozitív osztóinak számát! (pZH '15)