A számítástudomány alapjai 2015. I. félév

8. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Edmonds-Karp tétel: Ha a javító utas algoritmusban mindig egy lehető legkevesebb élből álló javító út mentén javítunk, akkor legfeljebb nm javítás kell a maximális folyam megtalálásához, ahol n a hálózat csúcsainak, m pedig az éleinek száma.

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a c kapacitásfüggvény minden élen egész értéket vesz fel, akkor a maximális nagyságú folyamok közt létezik olyan f folyam, ami minden élen egész értéket vesz fel (azaz ha a c kapacitás egész, akkor létezik *egészfolyam* a maximális folyamok között).

Def: A $G(V,E)$ gráfban éleinek F részhalmaza (más *független* szóval *párosítás*), ha F élei diszjunktak, azaz G bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És F-ben hurokélek sincsenek.) A G-beli független élek maximális számát $\nu(G) := \{|F| : F \text{ a } G \text{ párosítása}\}$ jelöli, tehát $\nu(G) = k$, ha G-nek van k páronként diszjunkt éle, de $k+1$ nincs. A G gráf egy *teljes párosítása* alatt a G olyan F párosítását értjük, amely G minden pontját *fedi*, azaz V minden pontjából indul F-nek éle.

Def: A G gráf csúcsainak U részhalmaza *lefogó* tulajdonságú, ha U *lefogja* G minden élét, azaz G minden élének van U-beli végpontja, más szóval $G-U$ üres gráf. A G minimális méretű lefogó ponthalmazának mérete $\tau(G) = k$ ha van k méretű lefogó ponthalmaz G-ben, de $k-1$ méretű nincs.

Megfigyelés: Tetszőleges véges $G = (V,E)$ gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Def: Ha $G = (V,E)$ és $X \subseteq V$ akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X, vx \in E\}$ az X ponthalmaz G-beli szomszédsága.

Hall tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Frobenius tétele: Tfh G páros, színosztályai A és B. Ekkor G-nek pontosan akkor van teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és $|X| \leq |N(X)|$ teljesül tetszőleges $X \subseteq A$ részhalmazra.

Kőnig tétel: Ha G véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

Alternáló utas algoritmus:

Input: $G = (A,B;E)$ ps gráf. Output: M maximális párosítás.

Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és javító utat keresünk. Ez olyan ú.n. alternáló út, aminek felváltva M-beliek és M-en kívüliek az élei és A egy fedetlen pontjából B fedetlen pontjába. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy M éleit B-ből A-ba, G többi élét pedig A-ból B-be irányítjuk, majd BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen út, akkor az egy javító út. Ha találtunk ilyet, akkor az út M-beli éleit kidobjuk M-ből, az M-en kívülieket pedig bevesszük M-be. Ezáltal egy újabb párosítást kapunk, ami a korábbinál eggyel több élt tartalmaz. Ezt követően újabb javító utat keresünk. Ha már nincs javító út, akkor az aktuális M párosítás maximális, azaz a mérete $\nu(G)$. Az A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető B-beli csúcsokkal és az M által fedett, A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető A-beli csúcsok egy $\nu(G)$ méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

Gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-reguláris páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges G gráfra $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-csúcsú, egyszerű G gráfra $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ teljesül.

4. Tfh G egyszerű, $|V(G)| = 2000$ és $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!
5. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.
6. $\boxed{\text{Gyakoroljuk az alternáló utas algotitmust kis gráfokon.}}$ Magyarázzuk meg, mi köze az alternáló utas algoritmusnak a növelő utas algoritmushoz.
7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $G = (V, E)$ (nem feltétlenül páros) gráfban az M párosítás nem maximális (azaz $|M| < \nu(G)$), akkor van M-hez javító út, azaz olyan alternáló út, amely M által fedetlen pontokat köt össze.
8. Adott egy G páros gráf (A és B színosztályokkal) és G minden v csúcsához egy $b(v)$ pozitív egész szám. Az a cél, hogy a lehető legtöbb élét kiválasszuk G-nek úgy, hogy minden v csúcs legfeljebb $b(v)$ kiválasztott élnek legyen végpontja. Adjunk hatékony algoritmust ennek a problémának a megoldására. (A feladatban körülírt élhalmazt b-párosításnak is szokás hívni.)
9. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden részvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
10. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$. (ZH '14)
11. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén. (pZH '14)