A számítástudomány alapjai 2015. I. félév

7. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G egyszerű gráf csúcsainak egy *színezésén* színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. ($f : V \to \mathbb{N}$, amire $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.) Egy színezésben azonos színt kapó csúcsok halmaza a *színosztály.* A G gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

Megfigyelés: Ha G k-színezhető, akkor G-ben nincs hurokél. A párhuzamos élek nem zavarnak.

Def: A G gráf *páros*, ha G kétszínezhető, azaz ha $\chi(G) \leq 2$.

Tétel: Tetszőleges G irányítatlan gráf pontosan akkor páros, ha G-nek nincs páratlan köre.

Def: A G gráf *Klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G legnagyobb klikkjének méretét $\omega(G)$ jelöli. (Azaz $\omega(G) = k$, ha G-ben van k méretű klikk, de nincs $k+1$ méretű.)

Állítás: Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Def: A *hálózat* egy (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ egy irányított gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ a G különböző csúcsai (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f : E \to \mathbb{R}_+$ egy *folyam*, ha $0 \leq f(e) \leq c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchhoff-feltétel*). Az f folyam *nagysága* (elavult szóhasználattal az f folyam *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su \in E} f(su) - \sum_{us \in E} f(us)$.

Def: A fenti hálózatban ha $X \subset V$ olyan halmaz, hogy $s \in X \not\ni t$, akkor a hálózat X által indukált *(st-)vágása* az X és $V \setminus X$ között futó élek halmaza, melybe beletartoznak a $V \setminus X$-ből X-be futó élek is. Az X által indukált st-vágás kapacitása $c(X) := \sum_{u \in X, v \in V \setminus X} c(uv)$, azaz az X-ből $V \setminus X$-be futó élek összkapacitása .

Lemma: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f egy folyam és $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást indukál, akkor $m_f = \sum_{v \in X, u \in V \setminus X} f(vu) - f(uv)$, azaz a folyamnagyság megegyezik a vágáson átfolyó nettó folyammennyiséggel.

Köv.: Ha f megengedett folyam és X egy st-vágást indukál, akkor $m_f \leq c(X)$.

Állítás: A (G, s, t, c) egy hálózat f folyama pontosan akkor maximális (azaz az m_f folyamnagyság akkor legnagyobb), ha $m_f = c(X)$ egy X által indukált st-vágásra.

Ford-Fulkerson tétel: Tetszőleges hálózatban a maximális folyamnagyság megegyezik a minimális vágáskapacitással.

Def: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f pedig egy folyam, akkor a $G_f = (V(G), E_f)$ az f-hez tartozó *segédgráf*, melyre $uv \in E_f$ ha $uv \in E(G)$ és $f(uv) < c(uv)$ (*előreél*) vagy ha $vu \in E(G)$ és $f(vu) > 0$ (*visszaél*). Az f folyamhoz egy *javító út* a G_f segédgráf egy s-ből t-be vezető irányított útja.

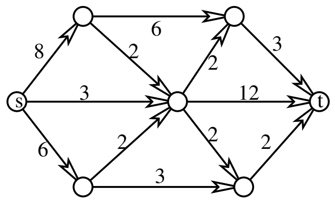
Állítás: Ha egy f folyamhoz tartozó G_f segédgráfban pontosan akkor létezik javító út, ha f nem maximális nagyságú. A javító út mentén az előreéleken ε-nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken ε-nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamot, a folyam nagysága ε-nal növelhető.

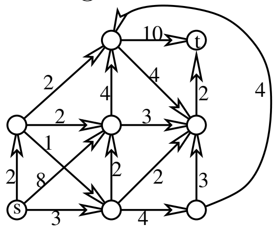
Javító utas algoritmus Kiindulunk a $f \equiv 0$ folyamból, és addig növelünk az aktuális f-hez tartozó segédgráf javító útja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs további javítás, akkor a folyam maximális. A segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza ekkor minimális st-vágást indukál.

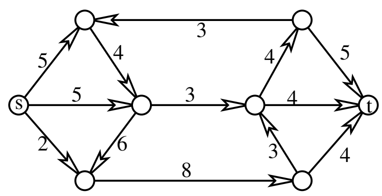
Gyakorlatok

1. Rajzolgassunk kis gráfokat, és színezzük ki a csúcsaikat a lehető legkevesebb színnel.
2. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
3. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
4. Van-e olyan G gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?
5. Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol a független pontok maximális száma $\alpha(G) = k$, ha G-ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.
6. Igazoljuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, ahol $\Delta(G)$ jelöli a maximális fokszámot a G gráfban.

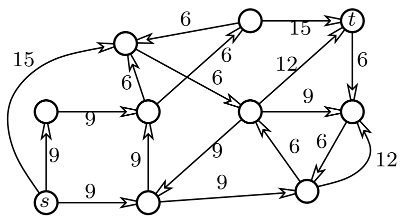
7. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
8. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$? És akkor, ha $\chi(G) \leq 3$?
9. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
10. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - e) < 3$ $\forall e \in E$? Milyen n-csúcsú, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és $\chi(G - v) < 3$ $\forall v \in V$?
11. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete $\omega(G) = 2$ és kromatikus száma $\chi(G) = k$. Képezzük a G' gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a G gráf k diszjunkt példányát, és felveszünk még n^k további pontot pontot. Minden ilyen pontnak G minden egyes példányából $1-1$ szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédsága. Mutassuk meg, hogy $\omega(G') = 2$, valamint, hogy $\chi(G') = \chi(G) + 1$ teljesül.
12. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges $k \geq 2$ egészre létezik olyan G_k gráf, melyre $\chi(G_k) = k$ és $\omega(G_k) = 2$.
13. Adjunk meg egy-egy maximális nagyságú folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges!







14. Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)



15. Rajzoljunk egy hálózatot, és döntsük el, melyik élt kellene a gráfban törölni, hogy a törlés nyomán létrejövő hálózatban a maximális folyamnagyság a lehető legkisebb legyen.
16. Rajzoljunk egy hálózatot, amiben valamelyik él kapacitása egy p paraméter. Határozzuk meg ebben a hálózatban p függvényében a maximális folyamnagyságot.
17. Adott a D irányított gráf valamint élein egy c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw folyam.
18. Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas pozitív ε-nal csökkentve a maximális folyamnagyság is pontosan ε-nal csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását alkalmas ε-nal növelve, a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik? Ha a fenti állítások valamelyike nem mindig igaz, akkor hogyan tudjuk egy adott hálózat esetén eldönteni, hogy létezik-e a kívánt tulajdonságú él?
19. Legyen s és t egy kocka két átellenes csúcsát, és irányítsuk a kocka éleit s-től t felé. Hogyan osszunk adjunk 4 élnek 1, 4 élnek 2 és 4 élnek 3 kapacitást úgy, hogy a kapott hálózatban a maximális st-folyam nagysága a lehető legnagyobb legyen?
20. Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor létezik olyan megengedett f' folyam is, amelyre $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.
21. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15.