A számítástudomány alapjai 2015. I. félév

6. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

A PERT probléma: Input: a $G = (V, E)$ DAG és egy $c : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény. Output: Minden $v \in V$ csúcsra a v-be vezető leghosszabb irányított út hossza.

(A szokásos mesében az egyes csúcsok a projektbeli „tevékenységek”, az élhosszok pedig azt mutatják, legalább mennyi időnek kell eltelnie a két adott tevékenység megkezdése között. Az output az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési idejét adja meg, aholis minden $uv \in E$ élre $k(v) \geq k(u) + c(uv)$ teljesül.)

A PERT módszer: Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ topologikus sorrendjét (pl DFS-sel). A $k(v_i)$ kezdési időket ebben a sorrendben határozzuk meg a $k(v_i) = \max\{0, \max\{k(v_j) + c(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}\}$ formulával, ill. megjelöljük mindazon $v_i v_j$ éleket, amelyek a maximumot adják.

Def: Ha a PERT problémát leíró G gráfnak egyetlen nyelője van, akkor *kritikus út* alatt az ezen nyelőbe vezető leghosszabb utat értünk. A kritikus út minden élét megjelöltük a PERT módszer során. *Kritikus tevékenység* pedig minden olyan csúcs, ami a nyelőbe vezető kritikus utak valamelyikének csúcsa.

Megfigyelés: Egy tevékenység pontosan akkor kritikus, ha annak megkezdésében a legkisebb mértékű csúszás is a teljes projekt befejezésének késését okozza.

Def: A $G = (V, E)$ gráf *Euler-sétája (Euler-körsétája)* a G gráf egy olyan (kör)sétája, mely E minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Megfigyelés: Ha a véges G gráfnak létezik Euler-körsétája, akkor G minden csúcsának fokszáma páros. Ha G-ben létezik Euler-séta, akkor G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Tétel: Ha a $G = (V, E)$ gráf véges és öf, akkor G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha G minden csúcsa ps fokú, ill. G-nek pontosan akkor van Euler-sétája, ha G-nek 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.

Def: A G gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* a G olyan köre (útja), mely G minden csúcsát tartalmazza.

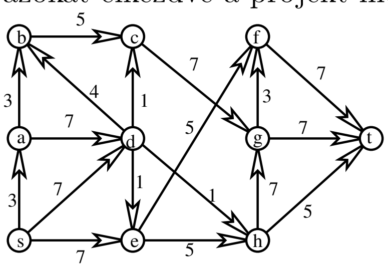
Állítás: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponense van.

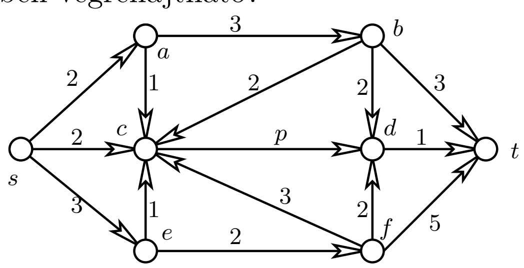
Dirac tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Ore tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u) + d(v) \geq n$, akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg az alábbi PERT problémákban a legrövidebb végrehajtási időt és a kritikus tevékenységeket. Mik az egyes tevékenységekre a legutolsó időpontok, amikor azokat elkezdve a projekt még épp időben végrehajtható?





2. Adjunk példát olyan PERT feladatra, ahol minden tevékenység kritikus, mégsincs minden tevékenység egy kritikus úton.

3. Adjunk olyan eljárást, amely tetszőleges PERT probléma esetén minden tevékenységhez meghatározza azt a legkésőbbi időpontot, amikor az adott tevékenységet elkezdve a teljes PERT feladat legrövidebb idő alatti végrehajtása még éppen nem kerül veszélybe.
4. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_ip_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út? (V '01)
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $G = (V, E)$ véges gráfban minden pont fokszáma páros, akkor az E élhalmaz felbontható diszjunkt körök uniójára.
6. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mi a válasz valódi sakktábla esetén? (A valódi sakktábla 8×8-as.)
7. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
8. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$, akkor X és $V \setminus X$ között páros számú él fut.
10. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris olyan részgráfja is, ami élek törlésével keletkezik.
11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
12. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
13. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.
14. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
15. Ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
16. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk. (ZH '99)
17. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (ZH '00)
18. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út! (ZH '01)
19. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-körsétája ill. Hamilton-köre? (ZH '01)