A számítástudomány alapjai 2015. I. félév

5. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf egy *bejárásán* a V-beli csúcsok végiglátogatását értjük, ahol a alábbiak szerint. Az újonnan elért csúcsot (ha lehetséges) mindig már korábban elért csúcsból kell egy oda vezető él mentén elérni. Ha ez nem lehetséges, és még van eléretlen csúcs, akkor tetszőleges csúccsal lehet a következőnek elért csúcs. (Irányítatlan gráf esetén minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.) A bejárás során minden csúcsot elérünk egyszer (ez adja az elérési sorrendet), és minden csúcs bejárását befejezzük egyszer, mégpedig akkor, amikor észrevesszük, hogy nem érhető el belőle újabb eléretlen csúcs. Minden csúcshoz megjegyezzük azt is, hogy melyik élen értük el. Ez utóbbi élek alkotják a bejárás *fáját*, élei a bejáráshoz tartozó *faélek*. A fában ősből leszármazottba vezető él az *előreél*, a leszármazottból ősbe vezető a *visszaél*, a többi pedig a *keresztél*.

Mélységi bejárás: Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf és $v \in V$ Output: a G egy bejárása, azaz
(1) egy *mélységi fa* (a bejárás fája),
(2) minden u csúcshoz egy, az elérési sorrendjéhez tartozó $m(u)$ *mélységi szám*, valamint $u \neq v$ esetén egy u-hoz tartozó mutató u fabeli *ősére*, ahonnan u-t elértük,
(3) minden u csúcshoz egy, a befejezési sorrendjéhez tartozó $b(u)$ *befejezési szám*,
(4) G éleinek osztályozása. Az xy él faél, ha y-hoz x-et jegyeztük fel. Az xy él előreél, ha $m(x) < m(y)$, és visszaél, ha $m(x) > m(y)$.

Működés: Üres veremmel indítunk. Ha üres a verem és G-nek van eléretlen v csúcsa, akkor v-t elértnek nyilvánítjuk, betesszük a verembe, és v megkapja a soron következő mélységi számot. Ha a verem nemüres és a verem tetején levő x csúcsnak van eléretlen szomszédja (mondjuk y), akkor y-t a verem tetejére tesszük és elértnek nyilvánítjuk. Az y csúcs megkapja a soron következő mélységi számot és feljegyezzük hozzá az elérését biztosító xy élt. Ha a verem tetején levő x-nek nincs eléretlen szomszédja, akkor akkor az x csúcsot befejezzük, x megkapja a soron következő befejezési számot és x-et kidobjuk a veremből. Ha a verem kiürült és minden csúcsot elértünk, akkor végül osztályozzuk G éleit.

Megjegyzés: (1) Verem helyett FIFO sorral dolgozva a szélességi bejárást végeznénk el. (2) A mélységi bejárás önmagát meghívó rekurzív algoritmusként is felfogható. A v-ből indított $Mb(v)$ bejárás abból áll, hogy mindaddig, amíg van v-nek eléretlen u szomszédja $Mb(v)$ meghívja az $Mb(u)$ eljárást. Ha nincs ilyen szomszéd, akkor $Mb(v)$ azzal ér véget, hogy ha van még eléretlen w csúcs, akkor meghívja az $Mb(w)$ eljárást.

Állítás: A mélységi bejárás lépésszáma lineáris, azaz van olyan c konstans, hogy tetszőleges n csúcsú, e élű gráf mélységi bejárásához legfeljebb $c(n + e)$ lépés szükséges.

Megfigyelés: Ha uv előreél, akkor u elérésekor v még nem lett elérve, de (mivel u befejezésekor már minden u-ból elérhető csúcsot elértünk) u-ból vezet v-be irányított út a mélységi fában. Ha uv visszaél, akkor van a mélységi fában vu út, ami az uv éllel együtt kört alkot. Ha uv keresztél, akkor v nem leszármazottja u-nak, ezért u-t be kellett fejezni v elérése előtt.

Köv.: Irányítatlan gráf mélységi bejárásakor nem lesz keresztél.

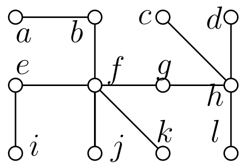
Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf *aciklikus (DAG)*, ha nincs benne irányított kör. A G csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje *topologikus sorrend*, ha él csak kisebb indexű csúcsból futhat nagyobb indexűbe.

Megfigyelés: Ha G DAG, akkor tetszőleges mélységi bejárásában a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása topologikus sorrend.

Köv.: Tetszőleges G irányított gráfra ekvivalensek az alábbiak: (1) G DAG, (2) G mélységi bejárásakor sem keletkezik visszaél (3) G csúcsainak van topologikus sorrendje.

Gyakorlatok

1. Rajzoljunk irányított gráfot, adjunk az éleknek hosszokat és szélességeket. Keressünk legszélesebb legrövidebb utat a Dijkstra algoritmus célszerűen módosított változatával.
2. Mutassunk példát olyan G gráfra és annak e élére, hogy e keresztél G alkalmas mélységi bejárásánál.
3. Az ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c ill. a és e szomszédosak G-ben? (ZH '14)



4. Legyenek a 7 csúcsú G gráf pontjai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ és v_9, valamint akkor legyen v_i és v_j szomszédos, ha i és j relatív prímek. Ekkor a v_iv_j él szélessége $|i-j|$. Határozzunk meg a v_1 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legszélesebb utat. (ZH '14)
5. Rajzoljunk egy irányított gráfot, végezzük el a mélységi bejárását. Ha a mélységi fa minden élét meg kell hagyni, akkor legalább hány élét kell törölni G-nek, hogy DAG-ot kapjunk? Mik a törlendő élek? Határozzuk meg a csúcsok befejezési számozását is. Mi a válasz akkor, ha nem a mélységi fából indulunk ki?
6. Igaz-e, hogy minden aciklikus, irányított G gráf csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van? (ppZH '14)
7. Igaz-e, hogy ha egy n csúcsú, aciklikus, irányított G gráfban van egy $n-1$ élű irányított út, akkor G csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van? (ppZH '14)
8. Legyen G DAG, és tegyük fel, hogy az u és v csúcsok között egyik irányban sincs irányított út G-ben. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyat topologikus sorrendje, amelyben u megelőzi v-t, és olyan is, amelyben v előzi meg u-t.