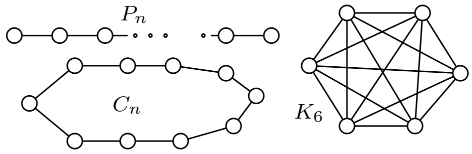
A számítástudomány alapjai 2015. I. félév

2. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: $G = (V, E)$ *egyszerű gráf*, ha (1) $V \neq \emptyset$ és (2) $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$
G gráf esetén $V(G)$ jelöli G *csúcsainak (pontjainak)*, $E(G)$ pedig G *éleinek* halmazát, azaz $G = (V(G), E(G))$. A G egyszerű gráf *véges*, ha V véges halmaz.
Def: A G gráf egy *diagramja* egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő önmagukat nem metsző görbék.
Def: Az $e = \{u, v\}$ élt röviden $e = uv$-vel jelöljük; u és v az e él *végpontjai.* u és v *szomszédos*, ha $uv \in E$. e és f *párhuzamos élek*, ha végpontjaik azonosak.
Hurokél az olyan él, melynek végpontjai azonosak.
A $G = (V, E)$ pár *gráf*, ha $V \neq \emptyset$, E élhalmaz V-n, és párhuzamos és hurokél is megengedett.
Def: A G gráf v csúcsának $d(v)$ *foka* a v végpontú élek száma (hurokél kétszer számít):
$d(v) := |\{e \in E : v \text{ végpontja } e\text{-nek}\}| + |\{e \in E : e \text{ hurokél és } v\text{-n}\}|$
Áll.: Ha G véges gráf, akkor fokszámainak összege $2|E(G)|$.
K_n az n-pontú *teljes gráf*: bármely két pontja össze van kötve.
Def: P_n az *n-pontú út*, C_n az *n-pontú kör* (ld. az ábrán)
Def: A G egyszerű gráf *komplementere* a $\overline{G} := (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ gráf. (Két pont pontosan akkor szomszédos, ha G-ben nem szomszédos.)



A G_1 és G_2 gráfok *izomorfak* ($G_1 \cong G_2$), ha G_1 és G_2 csúcsai is megszámozhatók 1-től n-ig úgy, hogy tetsz. i, j-re pontosan annyi él vezet i-ből j-be G_1-ben, mint G_2-ben.
Def: A G gráf *sétája* olyan $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k)$ sorozat, melyre $e_i \in E(G)$ és $e_i = v_i v_{i+1}$ $(\forall i)$.
A *körséta* olyan séta, melynek kiinduló és végpontja azonos: $v_1 = v_k$.
Def: Az *út* (ill. *kör*) olyan (kör)séta, aminek csúcsai (a végpontok azonosságától eltekintve) különbözők. Egyszerű gráfban az út (kör) azonosítható a hozzá tartozó pont- vagy élsorozattal.
Állítás: A G gráfban pontosan akkor létezik u és v között séta, ha létezik u és v között út.
Def: A G gráf *összefüggő (öf)*, ha bármely két pontja között vezet séta.
Def: $K \subseteq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G-séta, de nem létezik uv-séta ha $u \in K$, $v \in V(G) \setminus K$. **Köv.:** Minden gráf egyértelműen komponensekre bontható.
Def: A G gráf *fa*, ha G véges, összefüggő, körmentes és egyszerű.
Állítás: Ha az F fának n csúcsa van, akkor éleinek száma $|E(F)| = n - 1$.
Állítás: A véges, egyszerű G gráf pontosan akkor fa, ha az alábbiak közül legalább 2 teljesül:
(1) G összefüggő (2) G körmentes (3) G-nek eggyel kevesebb éle van, mint ahány pontja.

Gyakorlatok

1. Helyezzünk két világos és két sötét huszárt egy 3×3-as sakktábla négy sarkába úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes mezőkön álljanak. A huszárokkal a sakkban szokásos módon lépünk úgy, hogy sosem állhat egyszerre két figura ugyanazon a mezőn. Elérhető-e így, hogy a huszárok a tábla sarkaiban állnak, és az átellenes huszárok különböző színűek?

2. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy „forgatással" megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont. (ZH '00)

3. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk? (ZH '00)

4. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak? (ZH '14)

5. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.

6. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Ha G nem véges, akkor ez nem igaz.
7. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai a.) $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. b.) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$?
8. Bizonyítsuk be, hogy bármely 13 ember között van olyan, aki legalább 6 másikat ismer vagy van köztük 3 olyan, akik páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)
9. Tudjuk, hogy a 6 pontú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$. Igazoljuk, hogy G nem egyszerű. (pZH '14)
10. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
11. Találjuk meg (izomorfia erejéig) mindazon egyszerű gráfokat, melyekre
a) $n = 5, m = 2$ b) $n = 5, m = 3$ c) $n = 5, m = 7$ d) $n = 4, m = 5$ e) $n = 5, m = 8$
ahol n ill. m jelöli a gráf csúcsainak ill. éleinek számát.
12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú? (ZH '98)
13. Hány olyan páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van? (ZH '00)
14. Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
15. Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf és n csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ teljesül G-nek minden csúcsára, akkor G összefüggő.
16. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak? (V '00)
17. A G egyszerű gráfnak e egy olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G-nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
18. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
19. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élét is hagyjuk el, ám a $G - e - f$ és a $G - e - g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G - f - g$ gráf sem összefüggő.
20. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
21. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? (V '99)
22. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$? (V '00)
23. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k-1$, és G-nek létezik egy legalább k-adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő. (V '02)
24. Egy $n \times n$ méretű T táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy T-nek van olyan oszlopa, amelynek törlése után a kaptott táblázatban továbbra sincs két egyforma sor.(*)