A számítástudomány alapjai 2015. I. félév

13. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: Az A algoritmus *polinomidejű* (néha *polinomiális* vagy *hatékony*), ha létezik olyan $p(n)$ polinom, amelyre $f_A(n) \leq p(n)$ teljesül minden $n \geq 1$-re.

Def: *Döntési probléma* az olyan probléma, amelynek az outputja egyetlen bit (azaz az input tkp egy igen/nem kérdés). A P problémaosztályt azon döntési problémák alkotják, amelyekre létezik polinomidejű algoritmus.

Def: NP-beli probléma alatt olyan döntési problémát értünk, melyre az „igen” válaszra van polinomidejű bizonyíték. $co-NP$-beli probléma pedig az, melyre a „nem” válaszra van polinomidejű bizonyíték. **Állítás:** $P \subseteq NP \cap co-NP$.

Def: A Π probléma *polinomidőben visszavezethető* a Π' problémára (jelölése $\Pi \prec \Pi'$), ha a Π tetszőleges I inputjához polinomidejű algoritmussal konstruálható a Π' problémának olyan I' inputja, melyre (Π'-ben) ugyanaz a válasz, mint I-re Π-ben.

Megfigyelés: (1) $\Pi \prec \Pi' \prec \Pi'' \to \Pi \prec \Pi''$. (2) $\Pi \prec \Pi' \in P \Rightarrow \Pi \in P$.

Def: A Π döntési probléma *NP-nehéz*, ha $\Pi' \prec \Pi$ minden $\Pi' \in NP$ esetén, azaz minden NP-beli probléma visszavezethető Π-re. A Π *NP-teljes*, ha $\Pi \in NP$ és Π NP-nehéz.

Megfigyelés: Ha Π NP-teljes és $\Pi \prec \Pi' \in NP$, akkor Π' is NP-teljes.

Def: A SAT probléma inputja egy CNF, outputja „igen”, ha az inputban szereplő logikai változók logikai értéke megválasztható úgy, hogy az adott CNF kiértékelése „igaz” legyen. Minden CNF klózok összeéselése, minden klóz literálok összevagyolása és minden literál azonos valamelyik logikai változóval vagy annak negáltjával. **Példa:** : $(\overline{x}_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_7) \wedge (x_2 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_4 \vee x_5 \vee x_7) \wedge (\overline{x}_4 \vee \overline{x}_6)$

Cook-Levin tétel: A SAT probléma NP-teljes.

További NP-teljes problémák: (1) HAM (Input: G gráf, output: IGEN, ha G-nek van Hamilton köre), (2) 3-SZÍN (Input: G gráf, output: IGEN, ha $\chi(G) \leq 3$), (3) $k \geq 3$ esetén a k-SZÍN (Input: G gráf, output: IGEN, ha $\chi(G) \leq k$), (4) MAXFTN (Input: G gráf, $k > 0$ egész, output: IGEN, ha $\alpha(G) \geq k$) (5) MAXKLIKK (Input: G gráf, $k > 0$ egész, output: IGEN, ha $\omega(G) \geq k$)

Gyakorlatok

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák P-beliek:
   (a) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e benne kör.
   (b) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e olyan részgráfja, amiben minden fok $\geq k$.
   (c) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e K_{10} részgráfja.
   (d) Adott G öf gráfról és $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e,hogy G bármely feszítőfájának a költsége legalább k.
   (e) 2-SAT (A SAT probléma, ahol minden klóz legfeljebb két literált tartalmaz.)
2. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-beliek:
   (a) Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e k-reguláris részgráfja.
   (b) Adott G öf gráfról és $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élsúlyokról döntsük el, igaz-e,hogy G van pontosan k költségű feszítőfája.
   (c) Adott G gráfról és $l : E(G) \to \mathbb{R}$ (esetleg negatív) élhosszokról döntsük el, igaz-e,hogy G bármely két csúcsának a távolsága legfeljebb k
3. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák $co-NP$-beliek:
   (a) Adott G gráfról döntsük el, síkbarajzolható-e.
   (b) Adott $2n$ csúcsú G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy bármely n csúcsa páros gráfot feszít.
   (c) Adott G gráfról döntsük el, igaz-e, hogy $\omega(G) \leq k$.
   (d) Adott n számról döntsük el, hogy prímhatvány-e.
4. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák $NP \cap co-NP$-beliek:
   (a) Adott G gráfról döntsük el, páros-e.
   (b) Adott G gráfról döntsük el, összefüggő-e.
   (c) Adott G páros gráfról döntsük el, van-e teljes párosítása.
   (d) Adott hálózatról döntsük el, van-e benne k nagyságú folyam.
   (e) Adott n és k egészekről döntsük el, relatív prímek-e.
5. Mutassuk meg, hogy az alábbi problémák NP-teljesek:
   (a) HAMÚT inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G-nek van Hamilton útja
   (b) k-SZÍN inputja egy G gráf, outputja IGEN, ha G k-színezhető, azaz $\chi(G) \leq k$.
   (c) RÉSZGR inputja egy G és H gráf, outputja IGEN, ha G-nek van H-val izomorf részgráfja.