

A számítástudomány alapjai 2014. I. félév

9. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A G gráf *síkbarajzolható*, ha létezik G -nek olyan diagramja, amiben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. A síkbarajzolás a síkot *tartományokra* (lapokra) osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartomány nincs.

Tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Köv.: Tetszőleges konvex poliéder élhálójá síkbarajzolható.

Tétel: Ha G sr, n csúcsa, e éle, k komponense és t tartománya van, akkor $n + t = e + k + 1$.

Köv.: Ha G sr, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.

(Euler-formula) Ha egy öf sr gráfnak n pontja, e éle és t tartománya van, akkor $n + t = e + 2$.

Köv.: Ha G egyszerű, legalább 3-pontú, sr gráf, akkor $e \leq 3n - 6$. Ha G -nek háromszöglapja sincs, akkor még $e \leq 2n - 4$ is igaz.

Köv.: Ha G sr és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

Köv.: Sem K_5 , sem $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Def: A G és H gráfok *topologikusan izomorfak*, ha H megkapható G -ből az alábbi lépésekkel:

- (1) Törölünk egy uv élt, és beveszünk egy új csúcsot, u és v szomszédokkal.
- (2) Törölünk egy másodfokú x csúcsot, és éllel összekötjük x két szomszédját.

Kuratowski tétel: A G gráf pontosan akkor sr, ha nem tartalmaz sem $K_{3,3}$ -mal, sem K_5 -tel topologikusan izomorf részgráfot.

Def: Legyen $G = (V, E)$ síkbarajzolt gráf, legyen V^* G lapjainak halmaza. $G^* = (V^*, E^*)$ a G *duálisa*, ahol $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e -t határoló tartomány(oka)t összekötő él.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz *vágás*, ha Q egy olyan élhalmaz, hogy egyrészt Q elhagyásakor G szétesik (azaz komponenseinek száma megnő), másrészt Q egy legszűkebb élhalmaz ezzel a tulajdonsággal, azaz Q semelyik valódi részhalmazának elhagyásától sem esik G szét. Az e él *elvágó él*, ha $\{e\}$ vágás. A G gráf e és e' élei *soros élek*, ha $\{e, e'\}$ vágás.

Tétel: Legyen $G = (V, E)$ sr. (1) Ha G^* a G duálisa, akkor G^* sr és öf.

(2) $f(e) := e^*$ egy $f : E(G) \rightarrow E(G^*)$ természetes bijekciót definiál.

(3) G lapjai bijektíven G^* pontjainak felelnek meg.

(4) $e \in E(G)$ a G hurokéle (elvágó éle) $\iff f(e)$ a G^* elvágó éle (hurokéle).

(5) $e, e' \in E(G)$ párhuzamos (soros) élek $\iff f(e), f(e')$ soros (párhuzamos) élek.

(6) $C \subseteq E(G)$ a G köre (vágása) $\iff f(C)$ G^* vágása (köre).

(7) Ha G öf, akkor $G = (G^*)^*$, és ekkor G pontjai bijektíven G^* lapjainak felelnek meg.

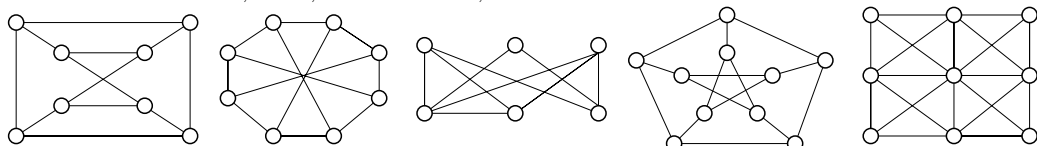
(8) Ha G öf, akkor $F \subseteq E(G)$ a G feszítőfája $\iff f(F)$ a G^* egy feszítőfájának komplementere.

Ötszintétel: Ha G síkbarajzolható, akkor $\chi(G) \leq 5$.

Négyszintétel: Ugyanez, 4-gyel.

Gyakorlatok

1. Mutassuk meg, hogy a K_5 , K_6 , K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G -be behúzzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
2. Ha G $n \geq 3$ pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - (a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - (b) ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - (c) G -nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja. (ZH '01)
3. Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?
4. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
5. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
6. Síkbarajzolhatók-e a K_6 , $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$ gráfok? Hát az alábbiak?



7. Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a $\overline{G}$ komplementere nem síkbarajzolható?(V '01)
8. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
9. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik 5 olyan ország, amik páronként szomszédosak!
10. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élek töröttvonalak, és egy ponton legfeljebb két él metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 9 élmetszéspont keletkezik. Mutassuk meg, hogy K_{10} lerajzolásakor legalább 42 élmetszéspontot kapunk.
11. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
12. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és $\overline{G}$ közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
13. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
14. Legfeljebb hány él és hány tartománya lehet egy olyan egyszerű, n pontú, sr G gráfnak, aminek van olyan lapja, ami G minden csúcsát tartalmazza a határán?
15. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem duális a duálisának.
16. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkbarajzolt, öf G gráf tartományai pontosan akkor színezhetők kis két színnel sakktáblaszerűen, ha G -nek létezik Euler körsétája.
17. A G sr gráfnak van Euler-körsétája. Igazoljuk, hogy G^* páros gráf!
18. Tfh G olyan legalább 4 csúcsú egyszerű sr gráf, amibe nem húzható újabb él az egyszerű sr tulajdonság megtartásával. Igazoljuk, hogy G^* 3-reguláris!
19. Bizonyítsuk be, hogy ha a G sr gráfnak van Hamilton-köre, akkor a tartományai 4 színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek!
20. Igazoljuk, hogy ha G n pontú sr gráf, és G izomorf G^* -gal, akkor G -nek $2n-2$ éle van! Tetszőleges $n > 3$ -ra mutassunk példát ilyen G -re!
21. Tfh G öf, sr, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G -nek?