A számítástudomány alapjai 2014. I. félév

8. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A $G(V, E)$ gráfban éleinek F részhalmaza (más *független* szóval *párosítás*), ha F élei diszjunktak, azaz G bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És F-ben hurokélek sincsenek.) A G-beli független élek maximális számát $\nu(G) := \{|F| : F \text{ a } G \text{ párosítása}\}$ jelöli, tehát $\nu(G) = k$, ha G-nek van k páronként diszjunkt éle, de $k+1$ nincs. A G gráf egy *teljes párosítása* alatt a G olyan F párosítását értjük, amely G minden pontját *fedi*, azaz V minden pontjából indul F-nek éle.

A G gráf csúcsainak U részhalmaza *független* ha U nem feszít élt, azaz U-nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét $\alpha(G)$ jelöli, azaz $\alpha(G) = k$, ha van G-nek k páronként nem szomszédos pontja, de $k+1$ nincs.

Ugyanez az U ponthalmaz *lefogó ponthalmaz*, ha U *lefogja* G minden élét, azaz G minden élének van U-beli végpontja, más szóval $G - U$ üres gráf. A G lefogó ponthalmazai méretének minimumát $\tau(G) := \min\{|U| : U \text{ a } G \text{ lefogó ponthalmaza}\}$ jelöli. (Tehát $\tau(G) = k$, ha G éleit k csúcs le tudja fogni, de $k-1$ nem.)

A G éleinek F részhalmaza *lefogó élhalmaz* ha $V(F) = V(G)$, azaz G minden csúcsából indul legalább egy F-beli él. A lefogó élhalmazok közül a legkisebb mérete $\rho(G)$, vagyis $\rho(G) = k$, ha k él le tudja fogni G minden pontját, de $k-1$ nem.

Megfigyelés: Tetszőleges véges $G(V, E)$ gráfra (1) $\nu(G) \leq \frac{1}{2}|V|$ és (2) $\nu(G) \leq \tau(G)$. Továbbá, ha G-nek nincs izolált pontja, akkor (3) $\alpha(G) \leq \rho(G)$ és (4) $U \subseteq V$ pontosan akkor független, ha $V \setminus U$ lefogó ponthalmaz. Végül: ha G egyszerű, akkor (5) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Gallai tételei: Tetszőleges véges, n pontú G gráfra (1) $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ha G hurokélmentes, és (2) $\nu(G) + \rho(G) = n$ ha G-ben nincs izolált pont.

Kőnig tétel: Ha G véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

Alternáló utas algoritmus: Input: $G = (A, B; E)$ ps gráf. Output: M maximális párosítás.
Kiindulunk az $M = \emptyset$ párosításból, és alternáló utat keresünk A fedetlen pontjából B fedetlen pontjába. Ez olyan út, aminek felváltva M-beliek és M-en kívüliek az élei. Ezt megtehetjük pl úgy, hogy M éleit B-ből A-ba irányítjuk, G többi élét A-ból B-be, és BFS-sel ellenőrizzük, hogy van-e irányított út a megfelelő fedetlen pontok között. Ha van ilyen alternáló út, akkor annak a mentén cserélünk, és a párosítás mérete nőtt. Ha nincs, akkor az aktuális M mérete $\nu(G)$. Az A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton elérhető B-beli csúcsokkal és az M által fedett, A-beli fedetlen csúcsból alternáló úton nem elérhető A-beli csúcsok egy $\nu(G)$ méretű lefogó ponthalmazt alkotnak.

Def: Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

Frobenius tétele: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Hall tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg a C_n kör ill. K_n teljes gráf α, τ, ν ill. ρ paramétereit. (Természetesen n függvényében.)
2. Az F élhalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk F-ről? Az U ponthalmaz a G gráfban egyszerre lefogó és független. Mit mondhatunk G-ről és U-ról?

3. A G gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$.
4. Mutassuk meg, hogy ha a 110 pontú G gráfnak van 73 élből álló lefogó élhalmaza, akkor G-nek van 37 élű párosítása.
5. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
6. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, 2001\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $i + j$ szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
7. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, 74\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
8. Legyen a H gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, 74\}$, és az i, j csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $0 < |i - j| \leq 2$. Határozzuk meg a $\nu(G), \tau(G), \rho(G), \alpha(G)$ gráfparamétereket.
9. Igazoljuk, hogy $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül tetszőleges véges G gráfra.
10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-csúcsú, egyszerű G gráfra fennáll a $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ összefüggés.
11. Tfh G egyszerű gráf, $|V(G)| = 2000$ és $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!
12. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.
13. Mutassuk meg, hogy tetszőleges izolált pontot nem tartalmazó G páros gráfra $\alpha(G) = \rho(G)$ teljesül.
14. Gyakoroljuk az alternáló utas algotitmust kis gráfokon. Magyarázzuk meg, mi köze az alternáló utas algoritmusnak a növelő utas algoritmushoz.
15. Adott egy G páros gráf (A és B színosztályokkal) és G minden v csúcsához egy $b(v)$ pozitív egész szám. Az a cél, hogy a lehető legtöbb élét kiválasszuk G-nek úgy, hogy minden v csúcs legfeljebb $b(v)$ kiválasztott élnek legyen végpontja. Adjunk hatékony algoritmust ennek a problémának a megoldására. (A feladatban körülírt élhalmazt b-párosításnak is szokás hívni.)
16. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden részvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.