A számítástudomány alapjai 2014. I. félév

6. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: A $G = (V, E)$ gráf *Euler-sétája (Euler-körsétája)* a G gráf egy olyan (kör)sétája, mely E minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Megfigyelés: Ha a véges G gráfnak létezik Euler-körsétája, akkor G minden csúcsának fokszáma páros. Ha G-ben létezik Euler-séta, akkor G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Tétel: Ha a $G = (V, E)$ gráf véges és öf, akkor G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha G minden csúcsa ps fokú, ill. G-nek pontosan akkor van Euler-sétája, ha G-nek 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.

Def: A G gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* a G olyan köre (útja), mely G minden csúcsát tartalmazza.

Állítás: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponense van.

Dirac tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Ore tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u) + d(v) \geq n$, akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

Gyakorlatok

1. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_ip_j \in E(G)) \iff |i - j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út? (V '01)
2. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mi a válasz valódi sakktábla esetén? (A valódi sakktábla 8×8-as.)
3. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
4. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
5. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris olyan részgráfja is, ami élek törlésével keletkezik.
6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
7. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
8. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.
9. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
10. Ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
11. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk. (ZH '99)
12. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (ZH '00)
13. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út! (ZH '01)
14. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-körsétája ill. Hamilton-köre? (ZH '01)