A számítástudomány alapjai 2014. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (`fleiner@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Def: Ha $G = (V, E)$ egy gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges G' részgráfjának *költsége* a $E(G')$ élhalmazbeli élek költségeinek összege.

Kruskal algoritmus: Input: $G = (V, E)$ összefüggő gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Output: $F = F_m$ a G egy minimális költségű feszítőfája.

Működés: Legyen $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, és $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és

$$F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{e_i\} & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_i & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

Tétel: A Kruskal algoritmus által kiszámított $F = F_m$ élhalmaz a G egy min ktgű feszítőfája.

Def: A $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf egy *bejárásán* a V-beli csúcsok végiglátogatását értjük, ahol a alábbiak szerint. Az újonnan elért csúcsot ha lehetséges mindig már korábban elért csúcsból kell egy oda vezető él mentén elérni. Ha ez nem lehetséges, és még van eléretlen csúcs, akkor tetszőleges csúccsal lehet a következőnek elért csúcs. (Irányítatlan gráf esetén minden élt oda-vissza irányított élnek tekintünk.) A bejárás során minden csúcsot elérünk egyszer (ez adja az elérési sorrendet), és minden csúcs bejárását befejezzük egyszer, mégpedig akkor, amikor nem érhető el belőle újabb eléretlen csúcs. Minden csúcshoz megjegyezzük azt is, hogy melyik élen értük el. Ez utóbbi élek alkotják a bejárás *fáját*, élei a bejáráshoz tartozó *faélek*. A fában ősből leszármazottba vezető él az *előreél*, a leszármazottból ősbe vezető a *visszaél*, a többi pedig a *keresztél*.

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy v_0 csúcs. Az ouptut egy v_0-ból induló bejáráshoz tartozó ún. *szélességi fa* (a bejárás fája) és elérési sorrend. A bejárás az általános elv szerint történik azzal, hogy a következőnek elért csúcsot mindig a lehető legkorábban elért csúcsból kell elérnünk. (Ezért a BFS bejáráshoz tartozó elérési sorrend megegyezik a befejezési sorrenddel.)

Állítás: BFS bejárás után a G gráfban nincs előreél, ha G irányítatlan, akkor visszaél sincs.

Tétel: A BFS bejárás fája a v_0 csúcsból minden más csúcsba a G gráf egylegrövidebb (legkevesebb élből álló) legrövidebb útját tartalmazza, azaz tetszőleges v csúcs G-beli távolsága v_0-tól megegyezik a v_0 gyökerű szélességi fán mért távolsággal.

Tétel: A szélességi bejárás lépésszáma legfejlebb $konst \cdot n \cdot m$, ahol n a G csúcsainak, m pedig G éleinek száma.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $l : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza. $dist(u, v)$ jelöli az (ir) uv utak közül a legrövidebb hosszát. Az l hosszfv *konzervatív*, ha nincs G-ben negatív összhosszú (ir) kör.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf, $u \in V$ és egy $l : E \to \mathbb{R}$ konzervatív élhosszfv. Tegyük fel, hogy $d(v) \ge dist(u, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az $e = vw$ *él menti javítás* azt jelenti, hogy a $d(w)$ értéket a $\min\{d(w), d(v) + l(vw)\}$ értékkel helyettesítjük. (Világos, hogy $d(w) \ge dist(u, w)$ az él menti javítás után is teljesülni fog.)

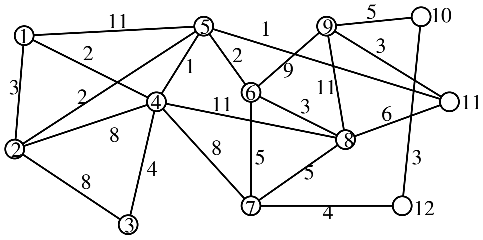
Dijkstra algoritmus

Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $l : E \to \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $u_1 \in V$ gyökér.
Output: $dist(u_1, v)$ minden $v \in V$-re. Működés: Kezdetben $U_1 := \{u_1\}$, $d(u_1) = 0$ és $v \ne u_1$ esetén $d(v) = \infty$. Az algoritmus i-dik fázisában végezzünk él menti javításokat minden U_i-ből kivezető $u_i v$ élen, majd válasszuk ki $V \setminus U_i$-ből azt az v csúcsot, amire $d(v)$ minimális. Legyen u_{i+1} ez a v csúcs. Jöhet az $(i+1)$-dik fázis. Az n-dik fázis után $dist(uv) = d(v)$ teljesül minden $v \in V$-re.

Tétel: A Dijkstra algoritmus helyesen működik. Minden fázis legfeljebb n javításból és egy minimumkiválasztásból áll (ami legfeljebb $konst \cdot n$ lépés), ezért a Dijkstra algoritmus lépésszáma legfeljebb $konst \cdot n^2$.

Megjegyzés: Ha minden v csúcsnál azt is nyilvántartjuk, melyik él menti javítás állította be a $d(v)$ értéket, akkor az így megjelölt élek a BFS-hez hasonló legrövidebb utak fáját alkotják.

Gyakorlatok



1. Keressünk az alábbi gráfban minimális költségű feszítőfát! Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak?
2. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.
3. A kormány tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
4. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
5. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
6. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)(V '99)
7. Rajzoljunk gráfot, és keressük meg egy csúcsból kiindulva a BFS fáját. Megfelelő élhosszok megadásával gyakoroljuk a Dijkstra algoritmust.
8. Törpfalván kitört a járvány: ronda kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van.
9. Adjunk hatékony algoritmus, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
10. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat, amiben minden mezőben egy 0 vagy egy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan vonalat, amire az igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni?
11. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?
12. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $l : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, valamint egy v gyökérpont. Egyetlen Dijkstra algoritmus lefuttatása segítségével találjuk meg G mindazon e éleit, amelyekre igaz az, hogy önmagában attól, hogy e hosszát eggyel csökkentjük egytelen csúcs v-től mért távolsága sem csökken.