

Kombinatorika és gráfelmélet I.

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy zenés-táncos mulatságon az utolsó szám előtt az teljesül, hogy minden fiú legalább 60 percet, minden lány pedig legfeljebb egy órát táncolt összesen. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas partnerválasztással elérhető, hogy az utolsó szám alatt minden fiú olyan lánnyal táncoljon, akivel már korábban is táncolt a mulatságon.

(A ZH írás közben elhangzott, hogy mindig egy fiú és egy lány táncol egymással.)

Legyenek a G páros gráf A színosztályának csúcsai a fiúk, a B színosztályé pedig a lányok, él pedig akkor fusson egy fiú és egy lány között, ha az utolsó szám elhangzása előtt már táncoltak a mulatságon. (2 pont)

Azt kell igazolnunk, hogy G -nek van A -t fedő párosítása, (1 pont)

azaz, az órán tanult Hall tétel értelmében azt kell megmutatnunk, hogy a fiúk tetszőleges X részhalmazára igaz, hogy $|N(X)| \geq |X|$ (1 pont)

más szóval legalább $|X|$ olyan lány van aki valamelyik X -beli fiúval táncolt. (1 pont)

A feltételek szerint az X -beli fiúk összesen legalább $60|X|$ percet, azaz legalább $|X|$ órát táncoltak együttvéve. (1 pont)

Tehát azok a lányok, akik ezekkel a fiúkkal táncoltak szintén összesen legalább $|X|$ órát táncoltak. (2 pont)

Mivel a lányok bármelyike legfeljebb egy órát táncolt, ezért csak akkor tudnak $|X|$ órát táncolni, ha a szóbanforgó lányok száma legalább $|X|$. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy valóban teljesül a Hall feltétel, így Hall tétele szerint csakugyan létezik A -t fedő párosítás, vagyis a fiúk mindegyike valóban választhat olyan partnert az utolsó tangóra, akivel már korábban is táncolt. (1 pont)

2. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban az A és B színosztályok mérete azonos, továbbá, hogy A tetszőleges nemüres X részhalmazára igaz az $|N(X)| \geq |X| + 1$ feltétel. Mutassuk meg, hogy G bármely e éléhez létezik G -nek e -t tartalmazó teljes párosítása.

(A ZH írása közben elhangzott, hogy nemüres helyett valódi részhalmaz értendő.)

Legyen $e = uv$, ahol $u \in A$ és v pedig az A -tól különböző B színosztálybeli csúcs. Elegendő azt igazolnunk, hogy az u és v törlésével keletkező $G' = G - u - v$ gráfnak van teljes párosítása, hisz ehhez az e élt hozzávéve G egy teljes párosítását kapjuk. (3 pont)

Ezt Frobenius tételéből igazoljuk, mely szerint ha G' két színosztályának mérete azonos és a Hall feltétel teljesül G' -re, akkor van G' -nek teljes párosítása. (2 pont)

Legyen tehát X az $A \setminus \{u\}$ színosztály tetszőleges nemüres részhalmaza. Világos, hogy X minden G -beli szomszédja, (a v csúcs kivételével) egyúttal G' -beli szomszéd is. (1 pont)

Ezek szerint $|N_{G'}(X)| \geq N_G(X) - 1 \geq |X| + 1 - 1 = |X|$, ahol az utolsó egyenlőtlenség a feladat feltételeiből következik. (3 pont)

(Ha $X = \emptyset$, akkor $|X| = 0$ miatt teljesül a Hall feltétel.) Tehát a Hall tétel szerint G' -nek létezik teljes párosítása, és ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

3. Jelölje $f(k)$ a $\nu(G)$ -nek (azaz G független élei maximális számának) a k -kromatikus gráfokon felvett lehetséges legkisebb értékét, azaz $f(k) := \min\{\nu(G) : \chi(G) = k\}$. Határozzuk meg $f(k)$ értékét minden pozitív egész k -ra.

Tanultuk, hogy $\chi(K_k) = k$, és könnyen látható, hogy $\nu(K_k) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, hisz a k csúcsú teljes gráfnak van olyan párosítása, ami legfeljebb egy csúcsot nem fed. (1 pont)

Ezek szerint $f(k) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy a fordított egyenlőtlenség is teljesül. Rögzítsük G egy k -színezését, és legyenek $V_1, V_2, \dots, V_k$ a megfelelő színosztályok. (1 pont)

Világos, hogy bármely két különböző színosztály között fut G -nek éle, (1 pont)

mert ha mondjuk V_i és V_j között nem lenne éle G -nek, azaz ha $V_i \cup V_j$ nem feszítene élt G -ben, akkor $V_i \cup V_j$ minden csúcsát azonos színűre színezve az derülne ki, hogy G -nek van $(k-1)$ -színezése is, ami ellentmond a $\chi(G) = k$ feltevésnek. (3 pont)

Legyen e_1 egy V_1 és V_2 , e_2 egy V_3 és V_4 , általában e_i egy V_{2i-1} és V_{2i} futó él, $i \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ esetén. (1 pont)

Mivel a kapott $e_1, e_2, \dots, e_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ élek függetlenek, ezért $\nu(G) \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, így mivel ezt minden k -kromatikus G gráfra megmutattuk, $f(k) \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ következik. A kapott egyenlőtlenséget összevetve a korábbival $f(k) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ adódik. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G -ből való törlésével kapott G' részgráf 3-színezhető legyen.

Legyenek V_1, V_2, V_3 és V_4 a G feladat szerint létező színezésének színosztályai. A színezés definíciója szerint a színosztályok független ponthalmazok, azaz G minden éle két különböző színosztály egy-egy csúcsát köti össze. Ezek szerint az éleket csoportosíthatjuk a szerint, hogy melyik színosztályok között futnak. (2 pont)

Ezáltal az éleket 6 osztályba soroljuk, hiszen a négyféle színből $\binom{4}{2} = 6$ féle lehetséges pár választható ki. (2 pont)

A hatféle osztály valamelyike az összes élnek legfeljebb a hatodrészét tartalmazza, vagyis feltehetjük, hogy mondjuk V_3 és V_4 között az összes élnek legfeljebb a hatodrésze fut. (2 pont)

Ha töröljük V_3 és V_4 között G minden élet, akkor a kapott G' részgráf 3-színezhető, pl úgy, hogy V_1, V_2 és $V_3 \cup V_4$ legyenek a színosztályok. (2 pont)

Ezzel a feladatban szereplő állítást igazoltuk. (1 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráfra $\chi(G) \leq 4$ teljesül, akkor az E élhalmaz felbontható egy E_1 és E_2 élhalmaz uniójára úgy, hogy (V, E_1) és (V, E_2) is páros gráf legyen.

Legyenek V_1, V_2, V_3 és V_4 a G feladat szerint létező színezésének színosztályai. (2 pont)

Legyen E_1 a $V_1 \cup V_2$ és $V_3 \cup V_4$, míg E_2 pedig a $V_1 \cup V_3$ és $V_2 \cup V_4$ között futó E -beli élek halmaza. (5 pont)

Világos, hogy (V, E_1) és (V, E_2) egyaránt páros gráfok, hisz éleik a fenti említett színosztályok között futnak. (1 pont)

Mivel G minden éle a $V_1, \dots, V_4$ színosztályok közül két különböző között fut, ezért bármely E -beli él az E_1 és E_2 halmazok valamelyikében megtalálható. (1 pont)

Ez pedig azt jelenti, hogy $E_1 \cup E_2 = E$, ahogyan azt a feladat is állította. (1 pont)

6. Mutassuk meg, hogy ha G összefüggő, véges gráf, és $\chi(G) > \chi'(G)$ teljesül, akkor G teljes gráf.

A tanultak szerint G -re teljesülnek a $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, (2 pont)

és a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ egyenlőtlenségek. (2 pont)

Ezek szerint $\chi(G) > \chi'(G)$ csakis úgy állhat, ha $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ és $\chi'(G) = \Delta(G)$. (2 pont)

Brooks tétele szerint ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$, (1 pont)

ezért a feladatbeli összefüggő G csakis páratlan kör vagy teljes gráf lehet. (2 pont)

Ha azonban G páratlan kör lenne, akkor $\chi'(G) = 3 = \chi(G)$, így ezt kizárhatjuk. (2 pont)

A G gráf tehát csakis teljes gráf lehet, ahogyan azt a feladat állította. (1 pont)

Az is igaz egyébként, hogy $\chi'(K_{2n}) = \chi'(K_{2n-1}) = 2n - 1$ ezért a feladat állítása pontosan akkor teljesül, ha G páros csúcsú teljes gráf. (0 pont)