Kombinatorika és gráfelmélet I.

1. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Jelölje $\mathcal{G}_n$ mindazon egyszerű gráfok halmazát, amiknek csúcsai a rögzített $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, legyen $\mathcal{G}_n^0$ a $\mathcal{G}_n$ mindazon elemeinek halmaza, amikben minden fokszám páros, ill. a $\mathcal{G}_n^1$ halmazt alkossák a $\mathcal{G}_n$ azon elemei, amiknek minden fokszáma páratlan. Döntsük el minden pozitív egész n-re, hogy a $\mathcal{G}_n^0$ és $\mathcal{G}_n^1$ halmazok közül melyiknek van több eleme.

   Tanultuk, hogy véges gráf csúcsainak fokszámösszege az élszám kétszerese, ami páros szám. (1 pont)
   Ezért a páratlan fokú csúcsok száma minden véges gráfban páros, (1 pont)
   így páratlan n esetén $\mathcal{G}_n^1 = \emptyset$, azaz nincs csupa páratlan fokú csúccsal rendelkező gráf. (1 pont)
   Mivel az n csúcsú üresgráf minden csúcsának páros a foka, ezért páratlan n esetén $\mathcal{G}_n^0$-nak van több eleme. (1 pont)
   Páros n esetén vegyük észre, hogy a K_n teljes gráfban minden csúcs fokszáma $n-1$, ami páratlan. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy ha G egy n csúcsú egyszerű gráf, akkor a $\overline{G}$ komplementergráf minden v csúcsára igaz, hogy $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1$, (1 pont)
   azaz $d_G(v)$ pontosan akkor páros, ha $d_{\overline{G}}(v)$ páratlan. (1 pont)
   Ezek szerint $G \in \mathcal{G}_n^0$ pontosan akkor teljesül, ha $\overline{G} \in \mathcal{G}_n^1$, más szóval az elemek komplementálása kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a $\mathcal{G}_n^0$ és $\mathcal{G}_n^1$ halmazok között. (2 pont)
   Mivel a kérdéses halmazok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, elemszámuk (páros n esetén) azonos.(1 pont)

2. Hány feszítőfája van az $n+2$ csúcsú $K_{2,n}$ gráfnak, amit úgy kapunk, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok mindegyikét összekötjük az u_1 és u_2 csúcsokkal?

   Minden F feszítőfa tartalmaz u_1-ből u_2-be egy utat, (1 pont)
   ami azt jelenti, hogy u_1-nek és u_2-nek van közös szomszédja. (1 pont)
   Ha e két pontnak két közös szomszédja is lenne, akkor a feszítőfa kört tartalmazna, ami lehetetlen. (1 pont)
   Tehát pontosan egy közös szomszédja van u_1-nek és u_2-nek, mondjuk v_i. (1 pont)
   A további $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ csúcsok mindegyike az u_1 és u_2 közül pontosan eggyel van összekötve. (2 pont)
   A feszítőfa tehát megkonstruálható úgy, hogy kiválasztjuk v_i-t, majd a további csúcsok mindegyikéről eldöntjük, melyik szomszédját válasszuk. (2 pont)
   A v_i csúcsot n-féleképp választhatjuk, és $n-1$ csúcsra kell két lehetőség között dönteni. (1 pont)
   Mivel ezek független választások, a lehetséges feszítőfák száma ezen lehetőségek számainak szorzatai, azaz $n \cdot 2^{n-1}$.(1 pont)

   Akinek nincs értékelhető eredménye, de látszik (pl rajzból), hogy megértette, mi a gráf, annak adjunk 1 pontot.

3. Tíz címkézett csúcson hány olyan fa adható meg, aminek öt levele, két másodfokú és három harmadfokú csúcsa van?

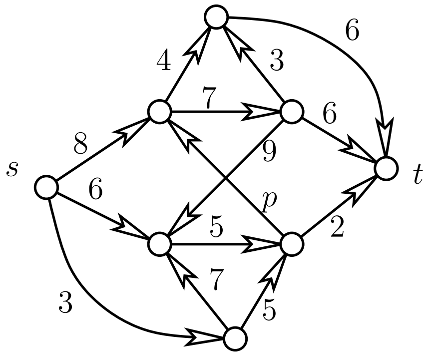
   Legyenek $v_0, v_1, \ldots, v_9$ a fa csúcsai. A feszítőfa konstrukciójához el kell döntenünk, hogy mik lesznek az egyes fokszámok, azaz 5 egyest, 2 kettest és 3 hármast kell kiosztanunk ezen csúcsok között. (1 pont)
   Ha minden csúcs alá odaírjuk a neki szánt fokszámot, akkor egy ismétléses kombinációt kapunk, ráadásul minden ismétléses kombináció (amiben az 1 ötször, a 2 kétszer és a 3 háromszor fordul elő) meghatározza a csúcsok fokszámait. (1 pont)
   A fent leírt ismétléses kombinábciók száma a tanultak szerint $\frac{10!}{5!2!3!}$. (2 pont)
   Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs indexe eggyel kevesebbszer szerepel, mint az adott csúcs fokszáma.(2 pont)
   Ez azt jelenti, hogy ha már ismerjük az egyes csúcsok fokszámát, akkor az ezen fokszámokkal rendelkező feszítőfák Prüfer kódja egy olyan 8 hosszú ismétléses permutáció, amiben a két másodfokú csúcs indexe egyszer, a három harmadfokú csúcs indexe kétszer-kétszer szerepel. (2 pont)
   Az ilyen ismétléses permutációk száma $\frac{8!}{2!^3}$, ismét az órán tanultak alapján. (1 pont)
   A kérdéses fák száma tehát a fenti ismétléses permutációk szorzata, azaz $\frac{8!10!}{2!^4 3!5!}$-nak adódik. (1 pont)

   Az első 4 pont megszerezhető úgy is, hogy az 5 levelet $\binom{10}{5}$-féleképp, a 3 másdofokú csúcsot a maradékokból pedig $\binom{5}{3}$-féleképp választhatjuk. (2 pont)
   Ezzel minden csúcsnak meghatároztam a fokszámát, hisz, a maradék két csúcs lesz a harmadfokú. (1 pont)
   Mivel független döntéseket hoztunk, a fokszámkiosztások lehetséges száma $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3}$ lesz, (1 pont)
   ami egyszerűsítés után éppen $\frac{10!}{5!3!2!}$-nak adódik. (0 pont)

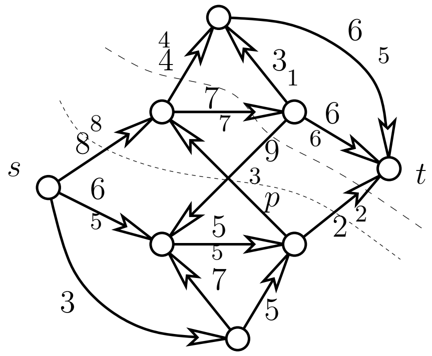
4. Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ a K_{4n} teljes gráf Hamilton körei, és jelölje G azt a gráfot, amit K_{4n}-ből kapunk, miután töröltük mindezen Hamilton-körök éleit. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton-köre.

   A G gráf bármely v csúcsára a H_i Hamilton körnek pontosan két éle illeszkedik, (1 pont)
   ezért v-ből legfeljebb $2(n-1)$ olyan él indul, ami a $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ Hamilton körök valamelyikének éle. (2 pont)
   Ezek szerint G-ben a v csúcsból legalább $(4n-1) - 2(n-1) = 2n+1$ él indul. (3 pont)

Az órán tanult Dirac tétel szerint ha egy $4n$ csúcsú gráf minden csúcsának legalább $2n$ a fokszáma, akkor a gráfnak van Hamilton köre. (3 pont)
Mivel ez a feltétel teljesül az általunk vizsgált G gráfra, ezért G-nek csakugyan van Hamilton köre, amint azt a feladat állítja. (1 pont)



5. Határozzuk meg a fenti ábrán látható hálózatban a p kapacitás legkisebb olyan értékét, ami mellett a maximális folyamnagyság a lehető legnagyobb.



Bal oldalt $p = 3$ mellett látható egy $8 + 5 = 13$ nagyságú f folyam, ahol a kisebb számok jelzik az adott élen a folyam értékét (ahol nincs szám, ott f értéke 0). (3 pont)
A ritka szaggatott vonallal jelzett st-vágás kapacitása 13, tehát a hálózatban (p értékétől függetlenül) nem lehet 13-nál nagyobb nagyságú folyam. (3 pont)
A sűrű szaggatott vonallal jelzett st-vágás kapacitása $8 + p + 2 = 10 + p$, tehát 13 nagyságú folyam csak akkor lehetséges, ha $p \geq 3$. (3 pont)
Láttuk, hogy $p = 3$-ra létezik 13 nagyságú folyam, ezért a p paraméter feladatban keresett értéke a $p = 3$. (1 pont)
Hogyan kaptuk meg a fenti folyamot? Persze a javítónak semmi köze hozzá, de ha vki ezt leírja és nem teljes a megoldása, akkor részpontszámokat gyűjthet.

A fenti folyamot egyébként úgy találtuk, hogy a 0 folyamból kiindulva kerestünk javító utakat. Mindezt úgy, hogy a p kapacitású élt csak „végszükség esetén” használjuk, azaz kezdetben a $p = 0$ választással éltünk. (2 pont)
Amikor nem tudtunk tovább javítani, akkor kaptuk a sűrű szaggatottal jelölt vágást. (1 pont)
Ekkor kezdtük el a p kapacitású élt használni, de csak amennyire „muszáj”. Az előbbi st-vágás mutatja, hogy csak úgy kaphatjuk meg az ily módon elért folyamnagyságot, ha a p paramétert legalább annyinak választjuk, mint amennyi folyam azon folyik. (1 pont)
Amikor a szóban forgó élen 3 értékű folyam folyik, akkor már nem tudunk tovább javítani a ritka szagatottal jelölt st-vágás miatt. (2 pont)

Persze az egészet a szomszédról is másolhatjuk, (-37 pont)
és ahogy korábban szó volt róla, senkinek semmi köze hozzá, hogyan találtuk a folyamot és a vágásokat. (0 pont)

6. Legyen G egy tetszőleges 3-élösszefüggő gráf, és legyen C a G egy 3 élt tartalmazó köre. Bizonyítsuk be, hogy G-ből C éleit törölve összefüggő gráfot kapunk.

A G gráf definíció szeirint pontosan akkor 3-élösszefüggő, ha G bármely két élét törölve összefüggő gráfot kapunk. (2 pont)
Tegyük fel tehát indirekt, hogy G szétesik a C kör éleinek törlésétől, és legyen K a kapott gráf egy komponense. (3 pont)
Mivel G összefüggő, G-ben fut él a K komponens ponthalmaza és a komplementere között, ráadásul ezen élek mindegyike egyúttal éle a C körnek is. (1 pont)
Azonban a C körnek legfeljebb 2 éle futhat a K komponens ponthalmaza és annak komplementere között, (1 pont)
hiszen C-nek (a skatulya-elv miatt) van két csúcsa vagy K-ban, vagy K-n kívül, és C ezen két csúcsát összekötő él nem a K ponthalmaza és annak komplementere közt fut. (1 pont)
Azt kaptuk, hogy K ponthalmazát legfeljebb két él köti a többi csúcshoz, így ezen éleket elhagyva G szétesik. (1 pont)
Ez ellentmond a G gráf 3-élöf tulajdonságának, és a kapott ellentmondás a feladat állításának helyességét igazolja. (1 pont)