

Kombinatorika és gráfelmélet I.

Első pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott rész-pontszám megítélésénk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképpen helyezhető el 8 db bástya a 8×8 -as sakktáblán a középpontra szimmetrikusan úgy, hogy ne üssék egymást? (Két bástya akkor üti egymást, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban állnak.)

Ha sikerül elhelyezni 8 bástyát a kívánalmak szerint, akkor mind a 8 sorban és mind a 8 oszlopban áll egy-egy bástya. (2 pont)

Az első sorban a bástyát 8-féle helyre tudjuk letenni, (1 pont)

ám ezzel (a centrális szimmetria miatt) rögzítjük az utolsó sorbeli bástya helyzetét is. (1 pont)

A második sorban elhelyezendő bástyára így már csak 6-féle lehetőség marad, (1 pont)

és ez meghatározza a 7-dik sorbeli bástya helyzetét is. (1 pont)

Folytatva a gondolatmenetet, az adódik, hogy minden soron következő sorban 2-vel kevesebb lehetőség van a bástya elhelyezésére, mint amennyi az előző sorban volt, (1 pont)

és mivel a döntéseink függetlenek, és minden kívánt bástyaelhelyezés pontosan egyféleképpen adódhat belőlük, (2 pont)

az összes lehetőség száma éppen $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 4!$. (1 pont)

2. Legfeljebb hány levele lehet egy olyan F fának, aminek a Prüfer kódjára igaz, hogy az abban szereplő számok összege 10?

Tanultuk, hogy az F fa levelei épp azok a csúcsok, amik nem szerepelnek F Prüfer kódjában. (3 pont)

Olyan Prüfer kódot keresünk tehát, amiben a számok összege 10, a kódban minél kevesebb csúcs fordul elő, (1 pont)

és a Prüfer kód egyúttal a lehető leghosszabb, hisz ekkor lesz az F fának a lehető legtöbb csúcsa, amilyek mindegyike levél, a kódban előforduló csúcsok kivételével. (2 pont)

A fenti követelmények pontosan akkor teljesülnek, ha a Prüfer kód éppen 10 db egyesből áll. (1 pont)

Ekkor a fának 12 csúcsa van, amik közül egyedül az 1 nem levél, (2 pont)

tehát a keresett maximális levélszám a 11. (1 pont)

3. Az alábbi ábra egy csatornahálózat vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik, a nyilaktól és a betűktől ill. számoktól tekintsünk el. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Lehetséges, hogy a terroristák a hálózatot valahol megmérgezték. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy egy speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken. Mivel a szkafanderre is tapadhat mérge, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételten behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek leereszkednie a csatornahálózatba ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse? (A feladatlapot nem lehet a dolgozat részeként beadni.)

(Az ábrát ld. az 5. feladatnál)

Készítsük el a G gráfot úgy, hogy a csomópontok legyenek G csúcsai, az egyes csatornák pedig az élei. (1 pont)

Ebben a gráfban a special officer mozgását minden egyes leereszkedés és kimászás között a G egy élsorozata írja le. (1 pont)

Minden egymást követő kimászásnak és leereszkedésnek megfelelő gráfcsúcs közé húzzunk be egy élt a G gráfban. Legyen a kapott gráf G' . A G' gráfban a fenti élsorozatok és az újonnan behúzott élek egy Euler-sétát határoznak meg. (3 pont)

Az a cél tehát, hogy minél kevesebb élt húzzunk be G -be úgy, hogy a kapott G' gráfnak legyen Euler-sétája, (2 pont)

azaz, mivel G eredetileg összefüggő volt, G' -nek legf két ptn fokú csúcsa maradjon. (1 pont)

Mivel G -nek 8 páratlan fokú csúcsa van, ezért három (páratlan fokú csúcsok közti) él behúzásával elérhető a kívánt tulajdonság. (1 pont)

Eszerint a szakertőnek legalább négyszer kell alászállnia. (1 pont)

4. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú, 9-reguláris, egyszerű, gráf, akkor G -ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler köre.

Teljesül a Dirac tétel feltétele, miszerint minden csúcsból legalább $16/2$ él indul, így van G -nek Hamilton köre. (3 pont)

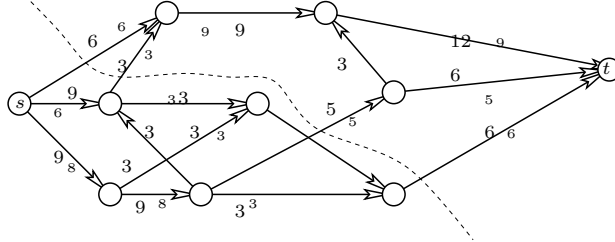
Ennek a Hamilton körnek minden második élét elhagyva 8-reguláris gráfunk marad, (2 pont)
amire továbbra is teljesül a Dirac tétel feltétele. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a 8 él elhagyása után a gráfnak még marad Hamilton köre, (1 pont)
így biztosan összefüggő lesz, (1 pont)
a tanult tétel szerint tehát van Euler köre. (1 pont)

5. Igaz-e, hogy a fenti ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam nagyság pontosan 19? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik. A feladatlapot nem lehet a dolgozat részeként beadni.)

A maximális folyam nagyság megegyezik a minimális st -vágás értékével. (3 pont)
Ha az 5 kapacitású él nincs benne egy minimális st -vágásban, akkor e vágásban csak 3-mal osztható kapacitású élek szerepelnek, azaz a vágásérték 3-mal osztható. (3 pont)
Ha az 5 kapacitású él benne van egy minimális vágásban, akkor (mivel minden más kapacitás 3 többszöröse) a vágás értéke 3-mal osztva 2 maradékot ad. (3 pont)
A 19-et 3-mal osztva 1 maradékot kapunk, ezért a minimális vágáskapacitás nem lehet 19, tehát a maximális folyam nagyság sem lehet ennyi. (1 pont)

Meg lehet oldani persze a feladatot favágással (azaz maximális folyam meghatározással) is.

A javító utak módszerével meghatároztunk egy 20 értékű folyamot az ábrán látható módon.



(a kis számok a folyam által felvett értékeket

jelentik.) (8 pont)
Tehát a maximális folyam nagyság legalább 20, vagyis *nem* 19. (2 pont)
(Mellesleg a maximális folyam nagyság pontosan 20, mégpedig a jelzett 20 kapacitású st -vágás miatt.) (0 pont)

6. Jelölje a (G, s, t, c) hálózat G gráfjában $\lambda(s, t)$ az éldisjunkt st utak maximális számát, $m(c)$ pedig a maximális folyam nagyságot e hálózatban. Legyen $c'(e) := c(e) + 1$ a hálózat minden e élére, és jelöljük $m(c')$ -vel a (G, s, t, c') hálózatbeli maximális folyam nagyságot. Igazoljuk, hogy $m(c') \geq m(c) + \lambda(s, t)$ teljesül.

Menger 1. tétele szerint az s -ből t -be vezető éldisjunkt utak $\lambda(s, t)$ maximális száma megegyezik a minden st -utat lefogó élek minimális számával. (2 pont)

Mivel egy st -vágásnak az s -t tartalmazó rész felől a t -t tartalmazó rész felé mutató élei minden st -utat lefognak, ezért minden st -vágásban legalább $\lambda(s, t)$ ilyen él van. (2 pont)

A Ford-Fulkerson tétel szerint a maximális folyam nagyság megegyezik a minimális vágás kapacitásával, és ez igaz a c és c' kapacitásfüggvényre is. (1 pont)

A fenti megfontolás miatt tetszőleges st -vágás c' szerinti kapacitása legalább $\lambda(s, t)$ -vel nagyobb a c szerinti kapacitásnál, (2 pont)

így ez az adott kapacitások szerinti minimális vágásra is igaz. (1 pont)

A Ford-Fulkerson tételből pedig az következik, hogy a maximális folyam nagyságokra is hasonló teljesül, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

Kombinatorika és gráfelmélet I.

Második pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott rész-pontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Már az óvodások is gyűjtik a superhero kártyákat. A nagycsoportban minden fiúnak van legalább 5 különböző superhero kártyája, ráadásul nincs olyan superhero kártya, ami 4-nél több nagycsoportosnak is megvan. Bizonyítsuk be, hogy minden nagycsoportos fiú kiválaszthatja egy-egy kártyáját úgy, hogy mindegyikük más-más superherot válasszon.

Legyenek a G páros gráf A színosztályának csúcsai a nagycsoportos fiúk, a B -é a superherok, él pedig akkor fusson egy fiú és egy hero között, ha a fiú rendelkezik az adott kártyával. (2 pont)

Azt kell igazolnunk, hogy G -nek van A -t fedő párosítása, (1 pont)

azaz, az órán tanult Hall tétel értelmében azt kell megmutatnunk, hogy a fiúk tetszőleges X részalmazára igaz, hogy $|N(X)| \geq |X|$ (1 pont)

más szóval legalább $|X|$ olyan superhero kártya van, amelyik vmik X -beli fiúnak megvan. (1 pont)

A feltételek szerint az X -beli fiúknak összesen legalább $5|X|$ superhero kártyájuk van. (1 pont)

Mivel minden superhero kártya legfeljebb 4 fiúnál fordul elő, ezért ez az $5|X|$ kártya legalább $\frac{5|X|}{4}$ superherot ábrázol, (2 pont)

tehát az X -beli fiúknak tényleg van legalább $|X|$ -féle superherojuk. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy valóban teljesül a Hall feltétel, így Hall tétele szerint csakugyan létezik A -t fedő párosítás, vagyis a fiúk mindegyike valóban kiválaszthatja egy-egy superhero kártyáját úgy, hogy mindannyian páronként különbözőket válasszanak. (1 pont)

2. Legyen U a G gráf egy $\alpha(G)$ méretű (azaz maximális) független ponthalmaza, és legyen U' a $G - U$ gráf egy maximális méretű független ponthalmaza. Mutassuk meg, hogy a G gráf $U \cup U'$ által feszített részgráfjának van U' -t fedő párosítása.

A Hall tétel értelmében a Hall feltétel teljesülését kell ellenőriznünk, (1 pont)

azaz azt, hogy U' tetszőleges X részalmazának legalább $|X|$ szomszédja van az U -beli pontok között. (3 pont)

Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy $X \subseteq U'$ -nek az U -beli szomszédjainak Y halmaza $|X|$ -nél kisebb méretű. (1 pont)

Tekintsük ekkor az $U^* := U \cup X \setminus Y$ halmazt. Mivel X -ből minden U -ba futó él Y -ba ment, és X a független U' részalmaz, ezért U^* is független lesz, (2 pont)

ráadásul $|X| > |Y|$ miatt $|U^*| > |U|$ teljesül. (2 pont)

Ez ellentmond annak, hogy U a G maximális méretű független ponthalmaza. Az ellentmondás a Hall feltétel teljesülését bizonyítja, amiből a Hall tétel szerint következik a feladatban leírt párosítás létezése. (1 pont)

3. Legyenek a G gráf csúcsai az $1, 2, 3, \dots, 20$ egész számok, és pontosan akkor fusson az i és j számok között éle G -nek, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg $\nu(G)$ -t, azaz a G gráf független éleinek maximális számát.

Egy n csúcsú gráfnak akkor van a lehető legtöbb ftn éle, ha azok teljes párosítást alkotnak, (1 pont)
ezért $\nu(G) \leq 10$, (1 pont)

hiszen ha G -nek van teljes párosítása, akkor az 10 élből áll. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy G -nek valóban létezik teljes párosítása, és így $\nu(G) = 10$ teljesül. (1 pont)

Mivel két szám akkor relatív prím, ha nincs közös prímosztójuk, ezért a szomszédos egészek mindig relatív prímek. (2 pont)

Ezek szerint az $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots, \{19, 20\}$ G -nek független élei. (3 pont)

Mi pedig pontosan ennek létezését akartuk igazolni. (1 pont)

4. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

Tekintsük a G gráf $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ csúcsait. Mivel ezek a számok páronként relatív prímek (hisz az 1-től eltekintve prímek), ezért G -nek egy 9 csúcsú klikkjét alkotják. (2 pont)

Tanították, hogy $\chi(G) \geq \omega(G)$, (2 pont)

és itt a fentiek miatt $\omega(G) \geq 9$, tehát a $\chi(G)$ kromatikus szám legalább 9. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy G kiszínezhető 9 színnel, amiből következik, hogy $\chi(G) = 9$. (1 pont)

Színezzük ki ugyanis a fenti klikk csúcsait különböző színekkel, és a további csúcsok színe legyen az adott szám legkisebb prímosztójának színe. (2 pont)

Ez G -nek egy 9-színezését adja, hisz az egyes színosztályokban minden csúcs a legkisebb elemének többszöröse lesz. (1 pont)

5. Igazoljuk, hogy ha az egyszerű, k -színezhető G gráfra teljesül, hogy egyetlen olyan gráf sem k -színezhető, ami G -ből egy új él behúzásával keletkezik, akkor a $\overline{G}$ komplementergráfnak pontosan k komponense van.

Legyenek a G k -színezésének színosztályai a $V_1, V_2, \dots, V_k$ pontthalmazok. (1 pont)

Világos, hogy G minden éle különböző színosztályok között fut. (2 pont)

Ha G -nek vannak olyan különbözőre színezett pontjai, amik között nem fut él, akkor ezen pontok közé egy élt behúzva a gráf továbbra is k -színezhető marad, ellentmondásban a feladatbeli követelménnyel. (2 pont)

Tehát különböző színű csúcsok között G -nek bizonyosan fut éle, azonos színűeket pedig nem köt össze él. (2 pont)

Ennek alapján a $\overline{G}$ komplementergráf nem más, mint k diszjunkt klikk uniója, ahol az egyes klikkek pontthalmazai az egyes színosztályok lesznek. (2 pont)

A $\overline{G}$ komplementergráfnak tehát csakugyan k komponense van. (1 pont)

6. Határozzuk meg a $\chi'(G) + \chi'(\overline{G})$ összeg minimális értékét a 2009 csúcsú egyszerű gráfokon.

Az órán azt tanították, hogy ha G egyszerű, akkor $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Persze az is igaz, hogy $\chi'(\overline{G}) \geq \Delta(\overline{G}) \geq$ (1 pont)

$2008 - \Delta(G)$, hiszen G maximális fokszámú csúcsának fokszáma $\overline{G}$ -ben épp $2008 - \Delta(G)$. (1 pont)

Ezek szerint $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \geq \Delta(G) + 2008 - \Delta(G) = 2008$. (1 pont)

Ahhoz, hogy az élkromatikus számok összege valóban 2008 legyen szükséges, hogy egyfelől $\Delta(\overline{G}) = 2008 - \Delta(G)$ teljesüljön, ami pontosan akkor igaz, ha G (és így $\overline{G}$ is) reguláris gráf. (1 pont)

Másrészt $\chi'(G) = \Delta(G)$ -nek kell teljesülnie, így a reguláris G gráf élei $\Delta(G)$ színnel színezhetők. (1 pont)

Ekkor azonban az azonos színűre színezett éleknek teljes párosítást kell alkotniuk, (1 pont)

ami (mivel G -nek 2009 csúcsa van) csak akkor lehetséges, ha G üresgráf. (1 pont)

Ekkor azonban $\overline{G}$ teljes gráf, és a fenti gondolatmenet szerint nem teljesül rá a $\chi'(\overline{G}) = \Delta(\overline{G})$ egyenlőség. (1 pont)

Azt kaptuk, hogy $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) \geq 2009$. (1 pont)

A K_{2009} teljes gráfra pedig a Vizing tétel miatt (vagy a gyakorlaton látott konstrukció szerint) $\chi'(K_{2009}) = 2009$ (1 pont)

és mivel az üresgráf élkromatikus száma 0, ezért K_{2009} -re az élkromatikus számok összege éppen 2009, tehát a keresett minimális érték is ez. (1 pont)