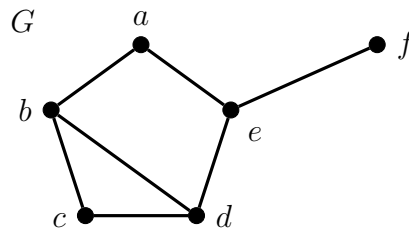


1. Az alábbi  $G$  gráfon futtatjuk az Edmonds-algoritmust az  $ae$  és  $bc$  élekből álló párosításból kiindulva. Az első néhány lépés során összehúztuk a  $(b, c, d, b)$ , majd az  $(a, \{b, c, d\}, e, a)$  kelyhet, ahol  $\{b, c, d\}$  jelöli a  $(b, c, d, b)$  kehely összehúzásával keletkezett új csúcsot.



- (a) Rajzoljuk fel az így kapott gráfot és az aktuális alternáló erdőt.



(3 pont)

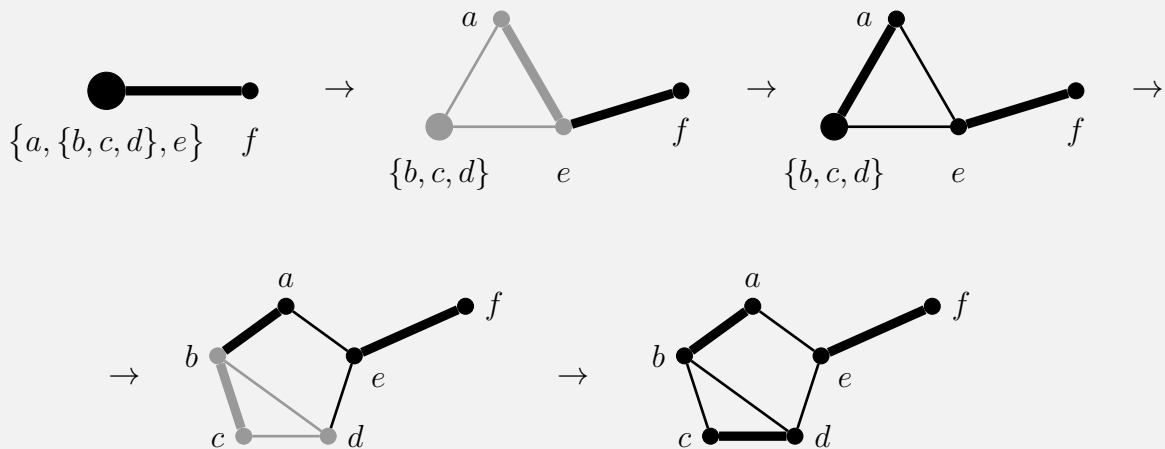
- (b) Hajtsuk végre az algoritmus következő lépését. (Nem szükséges az algoritmust végigfuttatni, de látszódjon, hogy mit csinál az algoritmus a következő él vizsgálatakor. Az él vizsgálatából adódó minden műveletet végezzünk el.)

A következő lépésben az  $\{a, \{b, c, d\}, e\}$  és  $f$  között vezető élt vizsgáljuk. (0 pont)

Mivel ez az alternáló erdő két különböző komponensbeli külső csúcsa között vezet, ezért javítótutat találtunk. (2 pont)

A javítóúton lévő éleknél felcseréljük, hogy a párosításba tartoznak-e vagy sem, vagyis a vizsgált él bekerül a párosításba. (1 pont)

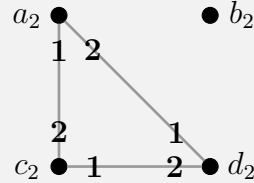
A javítóúton lévő kelyheket kibontjuk, és bennük esetlegesen megváltoztatjuk a párosítást. (1 pont)



(3 pont)

2. Legyen  $G$  egy olyan (nem feltétlenül páros és nem feltétlenül egyszerű) gráf, aminek páros sok csúcsa van, és legyen minden  $v \in V(G)$  esetén  $\prec_v$  egy szigorú preferenciarendezés a  $v$  csúcsra illeszkedő élek halmazán. Tegyük fel, hogy létezik olyan  $w \in V(G)$  csúcs, amire a  $G - w$  gráfnak van stabil párosítása.

- (a) Mutassunk példát arra, hogy ekkor lehetséges, hogy a  $G$  gráfnak van stabil párosítása, és arra is, hogy nincs. (Indokoljuk is meg példák helyességét.)

 $G_1$  $G_2$ 

A  $G_1$  gráfban az  $a_1b_1$  él egy stabil párosítást alkot, a  $G_1 - b_1$  gráfban pedig az üres párosítás stabil, hiszen egyik esetben sincs olyan él, ami ezeket blokkolná. (1 pont)

A  $G_2$  gráfban az  $a_2c_2d_2a_2$  kör egy nemeliminálható rotációt alkot, így  $G_2$ -nek nincs stabil párosítása. Viszont a  $G_2 - d_2$  gráfban az  $a_2c_2$  él egy stabil párosítást alkot, hiszen nincs olyan él, ami ezt blokkolná. (2 pont)

- (b) Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -be behúzható egy új  $e$  él és ez a preferenciarendezésekbe is beszűrhető úgy, hogy a kapott  $G + e$  gráfnak a kapott  $\{\prec'_v\}_{v \in V(G)}$  szigorú preferenciarendezésekre nézve biztosan legyen stabil párosítása. (Az új élnek a korábbi preferenciarendezésekbe való beszúrása alatt azt értjük, hogy az eredeti élek egymás közötti sorrendje változatlan marad.)

Vegyük a  $G - w$  gráf egy  $M$  stabil párosítását. Mivel  $G$ -nek páros sok csúcsa van, ezért a  $G - w$  gráfban létezik olyan  $u$  csúcs, amit az  $M$  párosítás nem fed. (1 pont)

Húzzunk be  $G$ -be egy új  $e$  élt  $u$  és  $w$  közé úgy, hogy az  $u$  és a  $w$  csúcs preferenciarendezésében is ez az új  $e$  él legyen az első. (2 pont)

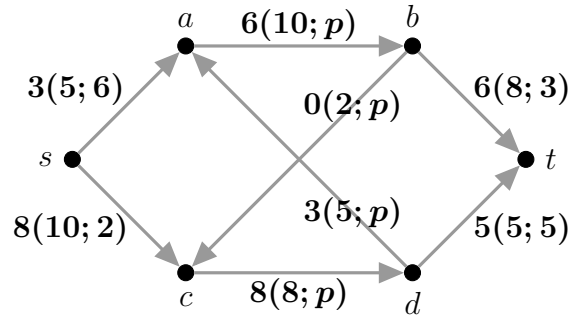
Megmutatjuk, hogy ekkor  $M \cup \{e\}$  a  $G + e$  gráf egy stabil párosítása. (0 pont)

Nyilván  $M \cup \{e\}$  egy párosítás. (1 pont)

Az  $e$  él nyilván dominálja az összes  $w$  csúcsra illeszkedő élt,  $M$  pedig dominálja az összes  $w$ -re nem illeszkedő élt. (2 pont)

Tehát  $M \cup \{e\}$  valóban a  $G + e$  gráf egy stabil párosítása. (1 pont)

3. Határozzuk meg a  $p \geq 0$  valós paraméter összes olyan értékét, melyre az alábbi  $st$ -folyam minimális költségű a 11-nagyságú  $st$ -folyamok között. (Az éleken szereplő első szám a folyam értéke az élen, a zárójelben szereplő első szám az él kapacitása, a második pedig az élen egységnyi folyam átvitelének a költsége.)



A megadott  $f$  folyam pontosan akkor minimális költségű, ha létezik olyan  $\pi$  potenciál, hogy  $f$  és  $\pi$  kielégítik az optimalitási kritériumokat, azaz minden olcsó (azaz negatív módosított költségű) él telített és minden drága (azaz pozitív módosított költségű) él üres. (1 pont)

Mivel az  $sa$ ,  $sc$ ,  $ab$ ,  $bt$ ,  $da$  élek se nem telítettek, se nem üresek, ezért ha  $f$  minimális költségű, akkor ezeknek a módosított költsége 0. (1 pont)

Tetszőleges  $\pi$  potenciál esetén  $\pi(s) = 0$ . (1 pont)

Vagyis ha  $f$  minimális költségű, akkor a  $w'(sa) = w(sa) - (\pi(a) - \pi(s)) = 0$  egyenletből  $\pi(a) = 6$  adódik. Hasonlóan az  $sc$  él miatt  $\pi(c) = 2$ , az  $ab$  él miatt  $\pi(b) = 6 + p$ , a  $bt$  él miatt  $\pi(t) = 9 + p$ , és a  $da$  él miatt  $\pi(d) = 6 - p$ . (3 pont)

Továbbá, mivel a  $cd$  él telített, ezért  $0 \geq w'(cd) = 2p - 4$ , azaz  $p \leq 2$ . Hasonlóan, mivel a  $dt$  él telített, ezért  $0 \geq w'(dt) = 2 - 2p$ , azaz  $p \geq 1$ . (2 pont)

Vagyis ha  $0 \leq p < 1$  vagy  $p > 2$ , akkor az  $f$  folyam biztosan nem minimális költségű. Ha viszont  $1 \leq p \leq 2$ , akkor  $f$  és  $\pi$  kielégítik az optimalitási kritériumokat (ehhez még le kell ellenőrizni, hogy a  $bc$  él drága, és  $w'(bc) = 2p + 4 \geq 0$  miatt ez valóban teljesül), tehát ebben az esetben  $f$  minimális költségű lesz. (2 pont)

4. Tetszőleges  $G$  irányítatlan gráfhoz definiáljuk a  $D$  irányított gráfot úgy, hogy  $D$  csúcshalmaza megegyezzen  $G$  csúcshalmazával, és tetszőleges  $u$  és  $v$  csúcsok esetén  $u$ -ból pontosan akkor vezessen irányított él  $v$ -be  $D$ -ben, ha  $G$ -nek van olyan maxvissza sorrendje, melyben  $u$  az utolsó előtti,  $v$  pedig az utolsó csúcs. Bizonyítsuk be, hogy ha  $D$  erősen összefüggő, akkor  $G$  reguláris. (Egy irányított gráfot erősen összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsból bármely csúcsba vezet benne irányított út. Egy irányítatlan gráfot regulárisnak nevezünk, ha minden csúcs foka ugyanannyi.)

Legyenek  $u, v \in V(G)$  tetszőleges csúcsok. Mivel  $D$  erősen összefüggő, ezért létezik  $D$ -ben irányított  $uv$ -út; legyen egy ilyen  $w_0w_1 \dots w_k$ , ahol  $w_0 = u$  és  $w_k = v$ . (0 pont)

A feladat feltételei szerint tetszőleges  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  esetén létezik olyan maxvissza sorrendje  $G$ -nek, amiben  $w_i$  az utolsó előtti és  $w_{i+1}$  az utolsó csúcs. (0 pont)

Az előadáson tanultak szerint tetszőleges  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  esetén  $\lambda(w_i, w_{i+1}) = d(w_{i+1})$ , (2 pont)

valamint nyilván  $\lambda(w_i, w_{i+1}) \leq d(w_i)$ . (Hiszen  $w_i$  és  $w_{i+1}$  között legfeljebb  $d(w_i)$  darab páronként éldiszjunkt út vezethet  $G$ -ben.) (1 pont)

Ebből

$d_G(u) = d_G(w_0) \geq \lambda_G(w_0, w_1) = d_G(w_1) \geq \lambda_G(w_1, w_2) = \dots \geq \lambda_G(w_{k-1}, w_k) = d_G(w_k) = d_G(v)$  adódik. (4 pont)

Mivel  $D$  erősen összefüggő, ezért létezik  $D$ -ben irányított  $vu$ -út is. Ekkor az előzőek szerint  $d_G(v) \geq d_G(u)$ . (2 pont)

Vagyis  $d_G(u) = d_G(v)$  teljesül tetszőleges  $u$  és  $v$  csúcsok esetén, tehát  $G$  reguláris. (1 pont)

5. Legyen  $G$  egy olyan gráf, melyben minden feszített kör 3-hosszú, kivéve egyet, ami 4-hosszú. Lehetséges-e, hogy  $\chi(G) = \omega(G) + 2$ ?

Legyen  $v$  a  $G$  feszített 4-hosszú körének egyik csúcsa, és tekintsük azt a  $G'$  gráfot, amit  $G$ -ből a  $v$  csúcs elhagyásával kapunk. (2 pont)

Ekkor  $G'$  egy merevkörű gráf, hiszen minden feszített köre 3-hosszú. (2 pont)

Vagyis az előadáson tanultak szerint  $\chi(G') = \omega(G')$ . (2 pont)

Nyilván  $\chi(G) \leq \chi(G') + 1$ , hiszen  $G'$  egy optimális színezését tekintve és  $v$ -nek egy új színt adva  $G$  egy helyes színezését kapjuk. (1 pont)

Hasonlóan,  $\omega(G') \leq \omega(G)$ , hiszen tetszőleges  $G'$ -beli klikk  $G$ -ben is klikk. (1 pont)

Tehát  $\chi(G) - \omega(G) \leq (\chi(G') + 1) - \omega(G') = 1$ , azaz  $\chi(G) \leq \omega(G) + 1$ , (2 pont)

és így  $\chi(G) \neq \omega(G) + 2$ . (0 pont)

6. Az alábbi  $G$  gráfon elkezdjük futtatni az órán tanult algoritmust egy Gomory–Hu-fa meghatározására. Az első két lépés után a jobb oldalon látható fát kaptuk. Fejezzük be az algoritmus futtatását. (Az algoritmus további lépései egyértelműen derüljenek ki a megoldásból.)



Mivel az aktuális fában például a  $\{b, d\}$  csúcs az eredeti gráf több csúcsát is reprezentálja, ezért ezt a csúcsot „szétvágjuk”. Ehhez először összehúzzuk  $G$ -ben az  $\{a, e\}$  ponthalmazt, és az így kapott gráfban meghatározunk egy minimális  $bd$ -vágást. (1 pont)

Mivel ebben a gráfban van 3 darab páronként éldiszjunkt  $bd$ -út, nevezetesen a  $(b, d)$ , a  $(b, \{a, e\}, d)$  és a  $(b, c, d)$  utak, ezért a minimális  $bd$ -vágás kapacitása legalább 3. (1 pont)

Így mivel a  $\{b\}$  ponthalmaz egy 3-élű vágást határoz meg, ezért ez egy minimális  $bd$ -vágás.

(1 pont)

Az ezen vágás segítségével meghatározott fa a baloldali ábrán látható. (2 pont)

Mivel a kapott fában az  $\{a, e\}$  csúcs az eredeti gráf több csúcsát is reprezentálja, ezért ezt a csúcsot „szétvágjuk”. Ehhez először összehúzzuk  $G$ -ben az  $\{b, c, d\}$  ponthalmazt, és az így kapott gráfban meghatározunk egy minimális  $ae$ -vágást. (1 pont)

Mivel ebben a gráfban van 2 darab páronként éldiszjunkt  $ae$ -út, nevezetesen az  $(a, e)$  és az  $(a, \{b, c, d\}, e)$ , ezért a minimális  $ae$ -vágás kapacitása legalább 2. (1 pont)

Így mivel az  $\{e\}$  ponthalmaz egy 2-élű vágást határoz meg, ezért ez egy minimális  $ae$ -vágás.

(1 pont)

Az ezen vágás segítségével meghatározott fa a jobboldali ábrán látható. (1 pont)

Mivel a kapott fának már nincs olyan csúcsa, ami a  $G$  több csúcsát is reprezentálja, ezért ez a fa  $G$  egy Gomory–Hu-fája. (1 pont)

