Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2023. 05. 26.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G gráf csúcsait úgy színeztük ki az $1, 2, \ldots, k$ színekkel, hogy G minden éle különböző színű csúcsokat köt össze. Tegyük fel továbbá, hogy a G csúcsaihoz tartozó preferenciák olyanok, hogy ha $uv, uw \in E(G)$ és $c(v) < c(w)$, akkor $uv \prec_u uw$, azaz u számára az uv él jobb, mint az uw él. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van stabil párosítása.

   A G gráfnak biztosan van stabil félpárosítása, amit pl az Irving-algoritmussal kaphatunk meg. (1 pont)
   Ha ez nem stabil párosítás, akkor bizonyosan tartalmaz olyan $\frac{1}{2}$ súlyú éleket, amelyek páratlan hosszúságú preferenciakört alkotnak. (2 pont)
   Indirekt igazoljuk, hogy G-ben nincs páratlan preferenciakör. Tfh u.i., hogy $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ ilyen kört alkotnak, azaz $v_1v_2 \succ_{v_2} v_2v_3 \succ_{v_3} v_3v_4 \succ_{v_4} \ldots \succ_{v_{2k+1}} v_{2k+1}v_1$. (1 pont)
   Ezért $c(v_1) \geq c(v_3) \geq \ldots \geq c(v_{2k+1}) \geq c(v_2) \geq \ldots c(v_{2n}) \geq c(v_1)$, (3 pont)
   így végig egyenlőségnek kell állnia, speciáliasan $c(v_1) = c(v_2)$. Ez $v_1v_2 \in E(G)$ miatt ellentmond annak, hogy c a G csúcsainak egy helyes színezése. (2 pont)
   Nincs tehát G-ben páratlan hosszúságú preferenciakör, ezért G minden stabil félpárosítása valójában stabil félpárosítás. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (1 pont)

   Az éltörlési lemmával is dolgozhatunk.

   Az éltörlési lemmával töröljünk G-ből annyi élt, amennyit csak lehet. Ha már nem lehet így további élt törölni, akkor a kapott G' gráf bármely $e = uv$ élére a tanultak szerint teljesül, hogy e pontosan akkor a legjobb éle u-nak, ha e a legrosszabb éle v-nek. (3 pont)
   Tekintsük G'-ben a csúcsok legjobb éleinek L halmazát! A fent említett tulajdonság miatt L megegyezik a csúcsok legrosszabb éleinek halmazával. (1 pont)
   Minden (nemizolált) v csúcsra pontosan egy legjobb és egy legrosszabb él illeszkedik, ezért az L-beli élek preferenciaköröket alkotnak. (1 pont)
   Legyen pl $v_1, v_2, \ldots, v_k$ egy ilyen preferenciakör, azaz $v_1v_2 \succ_{v_2} v_2v_3 \succ_{v_3} v_3v_4 \succ_{v_4} \ldots \succ_{v_k} v_kv_1$. (1 pont)
   A színezésre vonatkozó szabály miatt $c(v_1) \geq c(v_3) \geq \ldots \geq c(v_1)$ ill. $c(v_2) \geq c(v_4) \geq \ldots \geq c(v_2)$ adódik, ahonnan $c(v_1) = c(v_3) = \ldots$ ill. $c(v_2) = c(v_4) = \ldots$ teljesül a másodszomszédos csúcsok színeire. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy G' tetszőleges v csúcsára a v-ből induló legjobb ill. legrosszabb él ugyanabba a színosztályba fut. (1 pont)
   Ezért a G' gráf bármelyik komponense csak két színosztályból tartalmazhat csúcsot, vagyis G' minden komponense – ekkor persze maga G' is – páros gráf. (1 pont)
   A Gale-Shapley-tétel miatt G'-nek létezik egy M stabil párosítása, és az éltörlési lemma miatt M a G-nek is stabil párosítása. (1 pont)

---

2. Igazoljuk, hogy ha G k-reguláris gráf, akkor található G-ben k páronként éldiszjunkt út alkalmas u és v csúcsok között.

   Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G gráf egy maxvissza sorrendje. Az órán azt tanították, hogy $\lambda(v_{n-1}v_n) = d(v_n)$ (4 pont)
   $= k$, hiszen a G gráf k-reguláris. (3 pont)
   Menger tanult tétele szerint ez azt jelenti, hogy $u = v_{n-1}$ és $v = v_n$ között vezet k páronként éldiszjunkt út, és nekünk pontosan ezt kellett igazolni. (3 pont)

---

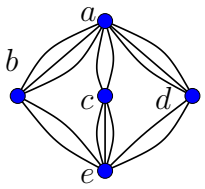
3. Tegyük fel, hogy a G gráf két komponensből áll: az egyik C_{42}, a másik K_{77}. Legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy faktorkritikus gráfot kapjunk?

A G gráf nem faktorkritikus, ugyanis a C_{42} komponensből egy csúcsot elhagyva két páratlan komponest kapunk, nem lesz benne teljes párosítás. (1 pont)
Ezért legalább egy élt be kell húzni a két komponens közé a faktorkritikus tulajdonság eléréséhez. (2 pont)
Ha csupán egyetlen e élt húzunk be, akkor ezen él C_{42}-beli végpontját elhagyva ismét egy két páratlan komponensből álló gráf teljes párosítását keressük. (2 pont)
A keresett minimum tehát legalább 2. (1 pont)
Ha azonban a két komponens közé két diszjunkt élt húzunk be, akkor a kapott gráfnak lesz Hamilton-köre. Ez a Hamilton-kör páratlan sok csúcsot tartalmaz, így faktorkritikus. (2 pont)
Faktorkritikus gráfhoz további éleket adva faktorkritikus gráfot kapunk, ezért G-hez a fenti módon hozzáadott két élt faktorkritikus gráfot eredményez. (1 pont)
A szükséges minimális élszám tehát pontosan kettő. (1 pont)

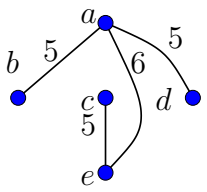
Akkor is faktorkritikus gráf adódik, ha a két hozzáadott élnek a K_{77} komponensben közös csúcsa van. Ez pl abból látszik, hogy az így kapott gráfnak van páratlan fülfelbontása.

---

4. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf egy Gomory-Hu fáját!



A keresett GH-fa a mellékelt ábrán látható. (3 pont)
Könnyen ellenőrizhető, hogy a fa élein szereplő számok az egyes faélek által meghatározott vágások élszámait adják meg. (1 pont)
Az is könnyen látszik, hogy a b, c, d csúcsok mindegyikéből vezet 5 éldiszjunkt út bármely másik csúcsba, (2 pont)
illetve a és e között vezet 6 éldiszjunkt út. (2 pont)



Ezért $\lambda(a, e) = 6$ és $\lambda(x, y) = 5$ teljesül minden más $\{a, b\}$-től különböző $\{x, y\}$ pontpárra. (1 pont)
Ezek szerint az ábrán látható fa nem csupán a pontpárok közötti élösszefüggőséget, hanem a minimális vágásokat is helyesen reprezentálja, az valóban GH-fája a kérdezett gráfnak. (1 pont)

---

5. Legyenek a G gráf csúcsai az (x, y) rácspontok, ahol $1 \leq x \leq n$ ill. $1 \leq y \leq n$. G élei a szomszédos rácspontokat kötik össze, azaz (x, y) szomszédai $(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1)$ ill. $(x, y+1)$ (amennyiben ezek G csúcsai). Tegyük fel, hogy G éleire úgy írtunk nemnegatív számokat, hogy G bármely v csúcsa esetén a v-re illeszkedő vízszintes élekre írt számok összege megegyezik a v-re illeszkedő függőleges élekre írt számok összegével. Bizonyítsuk be, hogy az élekre írt számok mindegyikét lehet úgy (felfelé vagy lefelé) kerekíteni, hogy ez utóbbi tulajdonság a kerekítés után is teljesüljön.

A G gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy a gráf lerajzolásakor keletkező $(n-1) \times (n-1)$ méretű sakktábla világos mezeinek élei pozitív, sötét mezőinek élei pedig negatív körüljárás szerint legyenek körbeirányítva. Ekkor ha G egy v csúcsába egy vízszintes él befelé mutat, akkor minden vízszintes él befelé mutat G-be, és minden függőleges kifelé, ha pedig egy vízszintes kifelé mutat, akkor minden vízszintes kifelé és minden függőleges befelé. (4 pont)
Vegyünk fel még egy izolált s és t csúcsot. Az így kapott hálózatban az élekre írt számok egy megengedett st-folyamot írnak le. (1 pont)
Alkalmazhatjuk a tanult folyamkerekítési lemmát. Ha ennek megfelelően kerekítjük az élekre írt számokat, akkor minden élre az eredetileg odaírt szám felfelé vagy lefelé kerekített változata kerül, és a vízszintes élekre írt számok összege meg fog egyezni a függőleges élekre írtakéval. Nekünk pontosan ilyen kerekítés létezését kellett igazolnunk. (5 pont)

Természetesen működik az órai bizonyítás lemásolása is, amikoris törtélekből álló kört keresünk, és annak a mentén javítunk minden lépésben.