Folyamok kerekítése

Gráfok és algoritmusok

7. gyakorlat

2025.

Ford–Fulkerson-tétel.

Tetszőleges (G, s, t, c) hálózatban a megengedett st-folyam maximális nagysága megegyezik az st-vágások kapacitásának minimumával.

Kerekítési lemma.

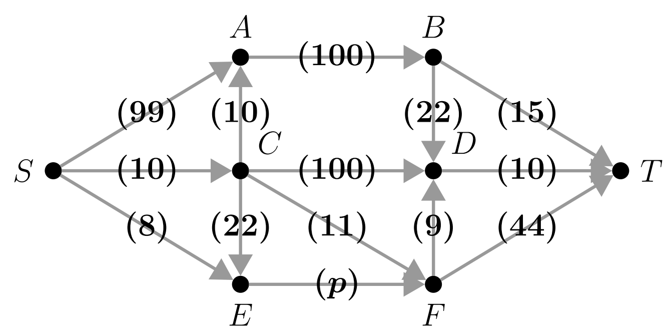
Ha a (G, s, t, c) hálózatban minden élkapacitás egész és f egy megengedett folyam, akkor van olyan f^* megengedett folyam is, amelyre $f^*(e) \in \{\lfloor f(e) \rfloor, \lceil f(e) \rceil\}$ teljesül minden $e \in E(G)$ esetén.

Táblázat-kerekítési lemma.

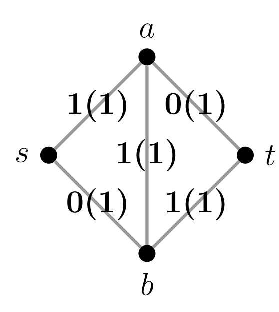
Ha egy táblázat minden eleme valós szám és minden sor- és oszlopösszeg egy egész szám, akkor a táblázat elemeit lehet úgy (lefelé vagy felfelé) kerekíteni, hogy a táblázatban a sor- és oszlopösszegek ne változzanak.

1. (a) Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális ST-folyamot és egy minimális ST-vágást $p = 10$ esetén.

   (b) Határozzuk meg az EF él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális ST-folyam-nagyság pontosan 42.



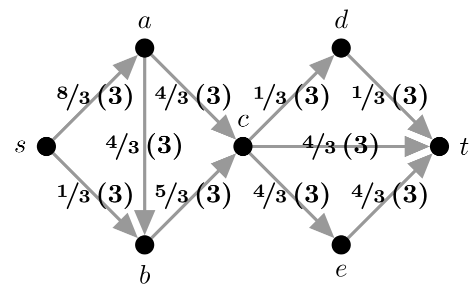
2. Növeljük a megadott st-folyamot a javítóutas algoritmus segítségével, ha ez lehetséges.



3. Ha $G=(V,E)$ egy gráf és $b\colon V\to\mathbb{N}$ egy fokszámkorlát, akkor b-párosításnak nevezünk egy olyan $M\subseteq E$ élhalmazt, amelyre minden $v\in V$ csúcs esetén $d_M(v)\le b(v)$ teljesül. Adjunk polinomidejű algoritmust maximális b-párosítás keresésére páros gráfokban.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy páros gráf, akkor $\nu^*(G)=\nu(G)$, azaz a maximális törtpárosítás mérete megegyezik a maximális párosítás méretével.

5. Kerekítsük az alábbi folyamot a kerekítési lemma bizonyítása alapján úgy, hogy a folyamnagyság is kerekedjék.



6. Tegyük fel, hogy a (G,s,t,c) hálózatban minden élkapacitás osztható 42-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha az f folyam nagysága 42 többszöröse, akkor van olyan f-fel azonos nagyságú f' folyam is ebben a hálózatban, amelyre minden $e\in E(G)$ esetén $f'(e)$ osztható 42-vel.

7. Tegyük fel, hogy a (G,s,t,c) hálózatban minden élkapacitás egész szám és f egy olyan folyam, aminek a nagysága egész. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan f^* megengedett folyam, melyre az alábbiak teljesülnek:
   - az f^* folyam az f kerekítése, azaz $f^*(e)\in\big\{\lfloor f(e)\rfloor,\lceil f(e)\rceil\big\}$ teljesül minden $e\in E(G)$ élre,
   - az f^* nagysága megegyezik az f folyaméval, azaz $m_f=m_{f^*}$,
   - egy előre megadott e' élre $f^*(e')=\lceil f(e')\rceil$ teljesül.

8. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az (x,y) rácspontok, ahol $x,y\in\{1,\dots,n\}$ tetszőleges egész számok, és G élei a szomszédos rácspontokat kötik össze. A G éleire úgy írtunk nemnegatív számokat, hogy G bármely v csúcsa esetén a v-re illeszkedő vízszintes élekre írt számok összege megegyezik a v-re illeszkedő függőleges élekre írt számok összegével. Bizonyítsuk be, hogy az élekre írt számok mindegyikét lehet úgy (felfelé vagy lefelé) kerekíteni, hogy ez utóbbi tulajdonság a kerekítés után is teljesüljön.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $A\in\mathbb{R}^{n\times k}$ tetszőleges mátrix, akkor A minden eleme kerekíthető úgy felfelé vagy lefelé, hogy A minden sor- és oszlopösszege is felfelé vagy lefelé kerekedjék.

10. Tegyük fel, hogy az $(n\times m)$-méretű M mátrix minden eleme egy $\mathbb{R}^3$-beli vektor, továbbá hogy a mátrix minden sorában és oszlopában az ott szereplő vektorok összege egész vektor, azaz $\mathbb{Z}^3$ eleme. Igaz-e, hogy az M mátrixban álló minden egyes vektor helyettesíthető egy egész vektorral úgy, hogy e cserék hatására egyetlen sor- illetve oszlopösszeg se változzon meg?