Maximális párosítások, Edmonds-algoritmus

Gráfok és algoritmusok

1. gyakorlat

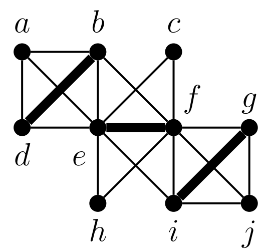
2025.

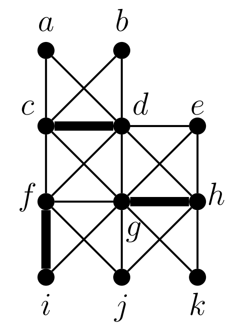
Hall tétele. Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül, ahol $N(X)$ az X részhalmaz szomszédságát jelöli.

Frobenius tétele. Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

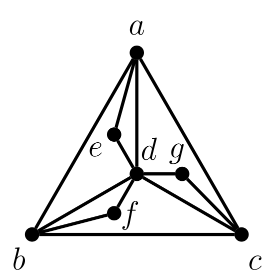
Faktor-kritikus gráf. A $G = (V, E)$ gráfot faktor-kritikusnak nevezzük, ha tetszőleges $v \in V$ csúcs esetén $(G - v)$-nek van teljes párosítása.

1. Keressünk maximális párosítást az alábbi gráfokban Edmonds algoritmusával a vastag vonalakkal jelölt párosításból kiindulva.





2. Bizonyítsuk be, hogy minden fának legfeljebb egy teljes párosítása van.
3. Adjunk polinomiális algoritmust, amely egy izolált pontokat nem tartalmazó gráfban meghatároz egy minimális lefogó élhalmazt.
4. Adjunk polinomiális algoritmust, amely egy G gráfnak meghatározza az összes olyan élét, amit nem tartalmaz G egyetlen teljes párosítása sem.
5. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy faktor-kritikusak-e.
   (a) K_n (b) C_n (c) $K_{n,m}$
   (d)



6. Nevezzük a G gráfot duplán faktor-kritikusnak, ha G bármely két csúcsát elhagyva, a keletkező gráfnak van teljes párosítása.
   (a) Tegyük fel, hogy G egy faktor-kritikus gráf, és legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy hozzáadunk egy új csúcsot, és azt összekötjük G minden csúcsával. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G' duplán faktor-kritikus.

(b) Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 közös csúccsal nem rendelkező duplán faktor-kritikus gráfok. Bizonyítsuk be, hogy ha G_1 egy u_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy u_2 csúcsával és G_1 egy v_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy v_2 csúcsával, akkor az így kapott G gráf is duplán faktor-kritikus.

7. Tegyük fel, hogy a G gráfnak három komponense van, mégpedig G_1, G_2 és G_3, és ezek mindegyike egy-egy faktor-kritikus gráf. Mutassuk meg, hogy a G gráf tetszőleges $u_1, v_1 \in V(G_1)$ és $u_2, v_2 \in V(G_2)$ és $u_3, v_3 \in V(G_3)$ esetén a $G' = G + u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1$ gráf szintén faktor-kritikus.

8. Legkevesebb hány élt kell behúzni

   (a) a $K_{n,n+1}$ teljes páros gráfba, illetve

   (b) abba a kétkomponensű gráfba gráfba, melynek egyik komponense C_{42}, a másik pedig K_{77},

   hogy faktor-kritikus gráfot kapjunk?

9. Bizonyítsuk be, hogy minden faktor-kritikus gráf 2-szeresen élösszefüggő.

10. Bizonyítsuk be, hogy egy F fának akkor és csak akkor van teljes párosítása, ha bármely $v \in V(F)$ csúcsa esetén $o(F - v) = 1$, azaz a v csúcsot elhagyva pontosan egy olyan komponens keletkezik, ami páratlan sok csúcsot tartalmaz.

11. Mutassuk meg a Tutte- és Forbenius-tétel felhasználása nélkül, hogy egy $G = (A, B; E)$ páros gráf esetén az alábbi állítások egymással ekvivalensek.

    (i) Tetszőleges $X \subseteq A$ esetén $|X| \leq |N(X)|$, valamint $|A| = |B|$.

    (ii) Tetszőleges $Y \subseteq B$ esetén $|Y| \leq |N(Y)|$, valamint $|A| = |B|$.

    (iii) Tetszőleges $Z \subseteq V(G)$ esetén $o(G - Z) \leq |Z|$, ahol $o(G - Z)$ a Z ponthalmaz elhagyásával keletkező páratlan csúcsú komponensek számát jelöli.

12. A G gráf éleinek egy $x\colon E(G) \to \mathbb{R}$ súlyozását G egy tört-párosításának nevezzük, ha minden él súlya nemnegatív, és tetszőleges csúcs esetén a rá illeszkedő élek súlyainak összege legfeljebb 1. Egy tört-párosítás méretén az összes él súlyainak összegét értjük. A G gráf maximális tört-párosításának méretét $\nu^*(G)$ jelöli.

    A G gráf csúcsainak egy $y\colon V(G) \to \mathbb{R}$ súlyozását G egy tört-lefogó ponthalmazának nevezzük, ha minden csúcs súlya nemnegatív, és tetszőleges él végpontjainak a súlyának összege legalább 1. Egy tört-lefogó ponthalmaz méretén az összes csúcs súlyainak összegét értjük. A G gráf minimális tört-lefogó ponthalmazának méretét $\tau^*(G)$ jelöli.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf esetén $\nu(G) \leq \nu^*(G) \leq \tau^*(G) \leq \tau(G)$.

    (b) Tetszőleges $n \geq 3$ esetén határozzunk meg a C_n és a K_n gráfokban egy maximális tört-párosítását, illetve egy minimális tört-lefogó ponthalmazt.

13. Egy tört-párosítást teljesnek nevezünk, ha tetszőleges csúcs esetén a rá illeszkedő élek élek súlyainak összege pontosan 1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfban létezik teljes tört-párosítás, akkor létezik benne teljes párosítás is.

14. Bizonyítsuk be, hogy éllistás megadás esetén az Edmonds-algoritmus lépésszáma $O(n^2m)$.